Suites numériques – exercices avec correction

I. majorations-minorations

Démontrer que la suite de terme général u_n est minorée ou majorée ; préciser, selon le cas, un minorant ou un majorant :

a) $u_n = n^2 - 5n + 1$ b) $u_n = n + \frac{3}{n} - 1$

Correction

a) $u_n = n^2 - 5n + 1$

Soit $u_n = f(n)$ avec f définie sur [0 ; +∞[, par $f(x) = x^2 - 5x + 1$.

on prouve facilement, (avec la forme canonique ou la dérivée de f) que f admet un minimum égal à -5.25 :

ainsi, pour tout réel x de [0 ; +∞[, $f(x) \geq$-5.25 et donc la *suite est minorée par -5.25*

(remarque : le minimum de f est atteint en 2.5, et $u_2 = -5 = u_3$, on peut donc minorer la suite par -5)

b) $u_n = n + \frac{3}{n} - 1$, $n \geq 1$

pour tout $n \geq 1$, $n-1 \geq 0$ et $\frac{3}{n} > 0$, donc $u_n > 0$, *la suite est minorée par 0*.

II. Démonstration par récurrence (voir feuille d'exercices)

Soit (u_n) la suite définie dans $\mathbb{N}$ par $u_0 = 4$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 5$;

Démontrer par récurrence que la suite est croissante et majorée par 7.

Correction

1. monotonie de la suite

On montre, par récurrence, pour tout entier naturel n, la propriété P_n : " $u_n \leq u_{n+1}$ "

- *Pour initialiser, comparons u_0 à u_1.* $u_0 = 4$ et $u_1 = 6$; on a bien $u_0 \leq u_1$: P_0 est vérifiée
- **Pour un entier n fixé, $n \geq 0$, supposons que $u_n \leq u_{n+1}$, montrons qu'alors $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.**

si $u_n \leq u_{n+1}$ *alors* $\frac{1}{4}u_n \leq \frac{1}{4}u_{n+1}$

d'où $\frac{1}{4}u_n + 5 \leq \frac{1}{4}u_{n+1} + 5$ *ou encore* $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

- *Conclusion ,*
  La propriété P_n : " $u_n \leq u_{n+1}$ " est vraie pour $n = 0$
  Si elle est vraie à un rang n, alors elle l'est au rang suivant,
  Ainsi, pour tout n enteir naturel, $u_n \leq u_{n+1}$; donc la suite (u_n) est croissante.

2. majoration par 7

: voir exercice analogue (n°8 de la fiche) traité en classe .