Exercice 4 — 5 points

Exercice de Bac :

le corrigé

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Étude de propriétés de la fonction f
   (a) Sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

   $$f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2} > 0; \quad \text{la fonction } f \text{ est donc strictement croissante sur } [0\,;\,+\infty[$$

   (b) Résolution dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation $f(x) = x$:

   $$f(x) = x \Longleftrightarrow 6 - \frac{5}{x+1} = x \Longleftrightarrow \frac{6x+6-5}{x+1} = x \Longleftrightarrow 6x+1 = x^2 + x \Longleftrightarrow x^2 - 5x - 1 = 0$$

   $$\Delta = (-5)^2 - 4\times 1\times(-1) = 29; \quad \text{donc} \left\{\begin{array}{l} \alpha = \frac{5+\sqrt{29}}{2} \simeq 5,193 \in [0\,;\,+\infty[\\ \beta = \frac{5-\sqrt{29}}{2} \simeq -0,193 \notin [0\,;\,+\infty[\end{array}\right.$$

   (c) La fonction f étant croissante sur $[0\,;\,+\infty[$:

   $$0 \leqslant x \leqslant \alpha \Longrightarrow 0 < 1 = f(0) \leqslant f(x) \leqslant \alpha = f(\alpha)$$

   De même :

   $$x \geqslant \alpha \Longleftrightarrow f(x) \geqslant \alpha = f(\alpha)$$

2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$.
   Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

   $$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

   (a) Voir annexe 2.
   Conjectures peut-on émettre quant au sens de variations et à la convergence de la suite (u_n) : la suite (u_n) est croissante et converge vers α.

   (b) Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$
   récurrence : $\forall n,\ n\in\mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$:
   - $u_0 = 0$ et $u_1 = 1 \Longrightarrow 0 \leqslant u_0 = 0 \leqslant u_1 = 1 \leqslant \alpha \simeq 5,193$
   - Supposons que pour un n donné, on ait : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$. La fonction f étant croissante sur $[0;\alpha]$:

   $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha \Longleftrightarrow 0 < 1 = f(0) \leqslant u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leqslant \alpha = f(\alpha)$$

   - Ainsi, $\forall n,\ n\in\mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

   (c) La suite (u_n) étant croissante et majorée par α, elle est convergente vers ℓ.
   La fonction f étant continue sur $[0;\alpha]$, ℓ vérifie :

   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = u_{n+1} = f(\ell) \Longrightarrow f(\ell) = \ell$$

   Nous savons que seul α vérifie $f(x) = x$ sur $[0;+\infty[$. Ainsi :

   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$$

3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0
   - Si $u_0 \in [o;\alpha[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers α.
   - Si $u_0 = \alpha$, la suite est constante et égale à α.
   - Si $u_0 \in]\alpha;+\infty[$, la suite est décroissante et converge vers α.

   Les démonstrations se font de la même manière que pour $u_0 = 0$.

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Annexe 2 (Exercice 4, question 2. a.)