EXERCICE 4
Commun à tous les candidats **5 points**

Exercice de Bac.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Étude de propriétés de la fonction f
   a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   b. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = x$.
   On note α la solution.
   c. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$.
   De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\,;\,+\infty[$.
2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$
   Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$
   a. Sur le graphique représenté dans l'annexe 2, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.
   Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\,;\,0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.
   Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?
   b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0
   Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?

Annexe 2 (Exercice 4, question 2. a.)