Sujet corrigé

Énoncé (d'après Bac 2000)

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes et on donnera les réponses sous forme de fractions.

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « Les boules sont toutes de couleurs différentes » ;

E_2 : « Les boules sont toutes de la même couleur ».

b) On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules, associe le nombre de boules bleues tirées.

Établir la loi de probabilité de X.

Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On procède cette fois de la façon suivante : on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

On effectue ainsi k tirages successifs.

Quelle est la valeur minimale de k pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

Solution

1. Un tirage simultané de 3 boules de l'urne peut être représenté par une combinaison.

a) $P(E_1) = \dfrac{6\times 3\times 2}{\binom{11}{3}} = \dfrac{36}{165} = \dfrac{12}{55}$; $P(E_2) = \dfrac{\binom{6}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{11}{3}} = \dfrac{21}{165} = \dfrac{7}{55}$.

b)

x_i	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{11}{3}} = \dfrac{2}{33}$	$\dfrac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \dfrac{4}{11}$	$\dfrac{\binom{6}{2}\binom{5}{1}}{\binom{11}{3}} = \dfrac{5}{11}$	$\dfrac{\binom{6}{3}}{\binom{11}{3}} = \dfrac{4}{33}$

$E(X) = 0\times\dfrac{2}{33} + 1\times\dfrac{4}{11} + 2\times\dfrac{5}{11} + 3\times\dfrac{4}{33} = \dfrac{18}{11}$.

2. Épreuve de Bernoulli : tirer au hasard une boule de l'urne.

On appelle succès s : « Tirer une boule bleue », $P(s) = \dfrac{6}{11}$.

Schéma de Bernoulli : on répète k fois cette épreuve dans des conditions d'indépendance car après chaque tirage, on replace la boule tirée dans l'urne.

On peut modéliser cette situation par la loi binomiale de paramètres k et $\dfrac{6}{11}$.

Donc la probabilité de ne tirer que des boules bleues est :

$$\left(\frac{6}{11}\right)^k\left(\frac{5}{11}\right)^0 = \left(\frac{6}{11}\right)^k.$$

• On montre de façon analogue que la probabilité de ne tirer que des boules rouges est $\left(\dfrac{3}{11}\right)^k$.

• On résout l'inéquation $\left(\dfrac{6}{11}\right)^k > 1\,000\left(\dfrac{3}{11}\right)^k$, ce qui équivaut successivement à résoudre :

$2^k\left(\dfrac{3}{11}\right)^k > 1\,000\left(\dfrac{3}{11}\right)^k$, $2^k \geqslant 1\,000$,

$k \ln 2 \geqslant \ln 1\,000$ (car ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$), $k \geqslant \dfrac{\ln 1\,000}{\ln 2}$.

Or $\dfrac{\ln 1\,000}{\ln 2} = 9{,}97$.

Donc la valeur minimale de k est 10.

Commentaires

- Les cas favorables sont ceux où l'on tire 1 bleue (6 choix), 1 rouge (3 choix) et 1 verte (2 choix).
- Les cas favorables sont ceux où l'on tire 3 bleues ou 3 rouges.
- Dans un tirage de 3 boules, il peut y avoir 0, 1, 2 ou 3 boules bleues. On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1.
- En moyenne, on peut espérer tirer environ 1,6 boule bleue lors d'un tirage de 3 boules.
- Le calcul de la probabilité de ne tirer que des boules bleues doit être justifié.
- La situation est analogue pour les boules rouges, on peut directement donner le résultat.
- On remarque que $6 = 2\times 3$ et donc que $6^k = 2^k \times 3^k$.