Exercice 1

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7 ; et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est 0,8.

Dans tout l'exercice n est un entier naturel non nul. On considère les événements :

G_n : « Pierre gagne la $n-ième$ partie . »

P_n : « Pierre perd la $n-ième$ partie . »

On pose : $p_n = p(G_n)$ et $q_n = p(P_n)$.

1. *Recherche d'une relation de récurrence.*

a. Déterminer p_1, puis les probabilités conditionnelles $p_{G_1}(G_2)$ et $p_{P_1}(G_2)$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, non nul, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}2$.

2. *Etude de la suite* (p_n)

On pose, pour tout entier naturel n, non nul, $v_{n=} p_n - \frac{2}{5}$.

a. Prouver que la suite (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n.

b. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.

La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.

La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.

Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.

La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 euro et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Soient E et F les événements :

   E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges » ;

   F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».

   Montrer que p(E) = 0,02 et p(F) = 0,17.
3. Si les 2 cases obtenues sont rouges, le joueur reçoit 10 euros ; si une seule des cases est rouge, le joueur reçoit 2 euros ; sinon il ne reçoit rien.

   X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel : le joueur mise 1 euro).

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.
4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   a. Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que : $p_n = 1-(0{,}9)^n$.

   b. Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.

   c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0{,}9$?