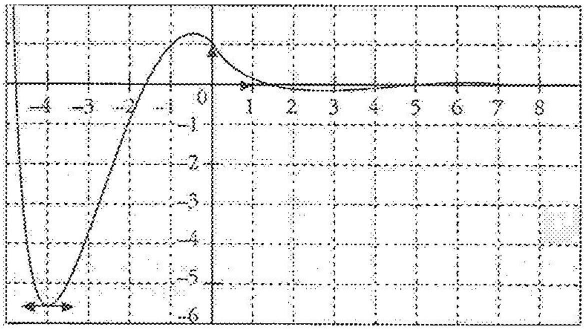
Exercice 1 : primitive et calcul d'aire

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i},\vec{j}$), avec pour unité graphique : $\frac{1}{2}$ cm

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} cos\ x,$
et C sa courbe représentative, donnée ci- dessous .



Le but de l'exercice est de calculer l'aire sous la courbe C, pour $x \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$.

1°/ Montrer que, pour tout réel x, on a $f'(x) = -e^{-\frac{x}{2}}(\frac{1}{2} cos\ x + sin\ x)$.

2°/ a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$

b) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$, on a $f(x) \geq 0$.

c) Montrer que, pour tout réel x , $4f''(x) + 4f'(x) = -5f(x)$ (1) .

3°/ On considère F la fonction définie pour tout réel x, par $F(x) = -\frac{1}{5}[4f'(x) + 4f(x)]$

a) Sachant que f vérifie (1), montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer alors que l'aire A du domaine limité par la courbe C , l'axe des abscisses, les droites d'équations respectives $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$ est égale à $\frac{1}{5}(e^{\frac{\pi}{4}} + e^{-\frac{\pi}{4}})\ cm^2$.

Exercice 2 : intégration par parties

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^e (2t-1)\ln t\ dt \quad ; \qquad J = \int_0^1 (x-1)e^{2x}\ dx .$$

2. . A l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer l' intégrale suivante : $K = \int_0^{\pi} e^t \cos 2t\ dt$

Exercice 3 : suite définie à l'aide d'une intégrale

On pose $I_0 = \int_0^1 e^x dx$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

1°/ Calculer I_0

2°/ a. A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre I_{n+1} et I_n.
b. Utiliser cette relation pour calculer I_2.

3°/ a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$
b. En déduire la limite de I_n.