Logarithme : propriétés algébriques *page de correction*

I. Transformations d'écritures

1. Exprimer en fonction de $ln\,3$ les nombres :

$a)\ \ln(27) = \ln(3^3) = 3\,ln3\,;$

$b)\ \ln(\ 2\,187\ ) = \ln 3^7 = 7\,ln3;$

$c)\ \ln\left(\frac{1}{9}\right) = -\ln 3^2 = -2ln3\,;$

d) $\ln(63) - \ln(7) = \ln(3^2 \times 7) - ln7 = \ln\frac{3^2\times 7}{7} = ln3^2 = 2\,ln3;$

$e)\quad \ln(9\sqrt{3}\,) = ln(\,3^2 \times 3^{\frac{1}{2}}) = ln\,(3^{\frac{5}{2}}) = \frac{5}{2}\,ln3$

2. Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A = \frac{\ln(\sqrt{5}+1)+\ln(\sqrt{5}-1)}{2}$;

$A = \frac{\ln(\sqrt{5}+1)+\ln(\sqrt{5}-1)}{2}$ = 1/2 ln [(√5+1) (√5-1)]= 1/2 ln(5-1) = 1/2 ln 4 = (1/2)×2 ln2 = ln 2

$B = \ln(2+\sqrt{3})^5 + \ln(2-\sqrt{3})^5$

$B = \ln[(2+\sqrt{3})^5\ (2-\sqrt{3})^5\,] = 5\ln(4-3) = 0$

3. Simplifier : $N = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{4}{5}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{98}{99}\right) + \ln\left(\frac{99}{100}\right)$

$N = ln1 - ln2 + ln2 - ln3 + ln3 - \cdots + ln98 - ln99 + ln99 - ln100 = -2ln10$

4 . Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\ln(x+3\,) + \ln(\,x+2\,) \geq \ln(\,x+7\,)$

dans $D\ =]-2\,;\,+\infty[$, l' inéquation est équivalente à $ln(x^2 + 5x + 6\,) \geq \ln(x+7)$

ou encore à : $x^2 + 5x + 6 \geq x+7$, c'est-à-dire : $x^2 + 4x - 1 \geq 0$

les racines de $x^2 + 4x$ -1 sont $-2-\sqrt{5}$ et $-2+\sqrt{5}$;

l'inéquation a pour ensemble de solutions : $S = [-2+\sqrt{5}\,;\,+\infty[$.

b. $ln\,(\,x^2 - 8\,) \leq \ln x + \ln 2$

dans $D\ =]\,2\sqrt{2}\,;\,+\infty[$, l' inéquation est équivalente à $ln(x^2 - 8\,) \leq \ln(2x)$

donc à $x^2 - 8 \leq 2x$ ou encore $x^2 - 2x - 8 \leq 0$.

Les racines de $x^2 - 2x - 8$ sont -2 et 4 et donc $S =]\,2\sqrt{2}\,; 4]$

5. Trouver les entiers naturels n tels que $a.\ \left(\frac{3}{2}\right)^n \leq 10^{-5}$ $b.\ (\,0.9\,)^n \leq \frac{1}{10}$

a. $\left(\frac{3}{2}\right)^n \leq 10^{-5}$ équivaut à $n\ln(\frac{3}{2}) \leq \ln 10^{-5}$, ou encore à $n \leq \frac{\ln(10^{-5})}{\ln(\frac{3}{2})}$ or $\frac{\ln(10^{-5})}{\ln(\frac{3}{2})}$ ~ -28.4 donc S=Ø

b. $(\,0.9\,)^n \leq \frac{1}{10}$ équivaut à $n\ln(0.9) \leq \ln(\frac{1}{10})$, ou encore à $n \geq \frac{\ln(\frac{1}{10})}{\ln(0.9)}$, or $\frac{\ln(\frac{1}{10})}{\ln(0.9)}$ ~21.8 donc les entiers solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à 22.

II. Etude de fonction

La fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (\ln(x))^2 - \ln(x)$

1. Etudier la limite de f en 0 et en $+\infty$.

2. Déterminer la fonction dérivée de f.

3. Etudier le signe de $f\,'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

4. Dresser le tableau de variation de f .

5. Tracer la courbe représentative *C* de f dans un repère orthonormal.

1. $\lim_0 f = +\infty$ (par somme, sans problème)

   Pour la lim en +∞, mettre (lnx)² en facteur permet de lever l'indétermination : $\lim_{+\infty} f = +\infty$

2. f est dérivable en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$,

   $f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times lnx - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\,(2lnx - 1)$

3. $\frac{1}{x} > 0$ *pour tout x de* $]0;\,+\infty[$, donc $f'(x)$ est du signe de $2lnx - 1$

Or $2lnx - 1 > 0$ *ssi* $x > \sqrt{e}$, d'où le tableau de signe de la dérivée

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
2lnx-1	||	-	0	+	
f'(x)	||	-	0	+	

Donc , f est strictement décroissante sur $]0\,;\,\sqrt{e}[$ *et strictement croissante sur* $[\sqrt{e};+\infty[$