

feuille d'exercices supplémentaires- ROC + application-
et feuille d'exercices- identité et théorème de Bezout-I. R.O.C. PGCD

Partie cours : Soit a et b deux entiers relatifs non nuls

On démontre que, quel que soit l'entier relatif q , $PGCD(a; b) = PGCD(b; a - bq)$

(Démonstration faite en classe)

Partie application :

$$n \in \mathbb{Z}$$

1. Développer et réduire $A = 5n^3 - n - (19 - n)(n + 2)$

$$A = 5n^3 + n^2 - 18n - 38$$

$$A = n(5n - 9)(n + 2) - 38 \text{ et } k = n(5n - 9), \underline{k \text{ est un nombre entier.}}$$

2. $A = 5n^3 - n - (19 - n)(n + 2)$

$$A = n(5n - 9)(n + 2) - 38$$

$$\text{donc, } 5n^3 - n = n(5n - 9)(n + 2) - 38 + (19 - n)(n + 2)$$

$$\underline{5n^3 - n = (5n^2 - 10n + 19)(n + 2) - 38}$$

remarque : $5n^2 - 10n + 19$ est un entier ,

on peut alors appliquer la question de cours avec $a = 5n^3 - n$ et $b = n + 2$, on en déduit :

$$\underline{PGCD(5n^3 - n; n + 2) = PGCD(n + 2; 38)}.$$

3. Valeurs du PGCD

- $PGCD(n + 2; 38)$ est un diviseur de 38

donc, les seules valeurs possibles du $PGCD(n + 2; 38)$ sont : 1, 2, 19 et 38.

- Si $5n^3 - n$ est un multiple de $n + 2$, alors $\underline{PGCD(5n^3 - n; n + 2) = |n + 2|}$

Etude des cas possibles :

$$n + 2 = 1, \text{ alors } n = -1$$

$$n + 2 = -1, \text{ alors } n = -3$$

$$n + 2 = 2, \text{ alors } n = 0$$

$$n + 2 = -2, \text{ alors } n = -4$$

$$n + 2 = 19, \text{ alors } n = 17$$

$$n + 2 = -19, \text{ alors } n = -21$$

$$n + 2 = 38, \text{ alors } n = 36$$

$$n + 2 = -38, \text{ alors } n = -40$$

Les seules valeurs convenables de n sont -1, -3, -4, 17, -21, 36 et -40 ; valeurs pour lesquelles $5n^3 - n \neq 0$

La valeur 0 ne convient pas, car, dans ce cas, $5n^3 - n = 0$.

Conclusion :

Si $5n^3 - n$ est un multiple de $n + 2$, alors les valeurs de n convenables sont: -40, -21, -4, -3, -1, 17 et 36.

II. Exercice n°10 (feuille Bezout)

Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux, avec $a > b$.

a) Si $a = 5$ et $b = 3$, alors $a + b = 8$ et $a - b = 2$, or $\text{PGCD}(8; 2) = 2$
 $a + b$ et $a - b$ ne sont pas premiers entre eux alors que a et b le sont.

b) évident : $u(a + b) + (v - u)b = ua + vb$

c) Si a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux, alors il existe un couple d'entiers, $(u; v)$ tel que :
 $au + bv = 1$;

alors $u(a + b) + (v - u)b = 1$; il existe un couple $(u'; v') = (u; v - u)$ tel que $u'(a + b) + v'b = 1$

le théorème de Bezout permet de conclure :

les entiers $a + b$ et b sont donc premiers entre eux ;

d) on a de même : $v(a + b) + (u - v)a = au + bv = 1$, d'où **$a + b$ et a sont premiers entre eux.**

e) on a vu précédemment : $u(a + b) + (v - u)b = ua + vb$

$$v(a + b) + (u - v)a = au + bv$$

Par multiplication membre à membre, on obtient :

$$uv(a + b)^2 + (v - u)(vb - ua)(a + b) - (v - u)^2 ab = 1, \text{ lorsque } a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux,}$$

ou encore :

$$[uv(a + b) + (v - u)(vb - ua)](a + b) - 2(v - u)ab = 1.$$

Les nombres $uv(a + b) + (v - u)(vb - ua)$ et $-2(v - u)$ sont entiers,

donc le théorème de Bezout permet de conclure :

les entiers $a + b$ et ab sont premiers entre eux lorsque a et b le sont.