Limites de fonctions

Activité préparatoire : observation de courbes de fonctions sur l'écran graphique de la calculatrice

I. Limites d'une fonction en $+\infty$, en $-\infty$

1°/ Limite infinie

***Définition** :* Soit f une fonction définie sur un intervalle $[\alpha, +\infty[$.

Dire que **f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$** signifie que l'on peut rendre **les valeurs de $f(x)$** aussi **grandes que l'on veut** dès que **x est suffisamment grand. On note :**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

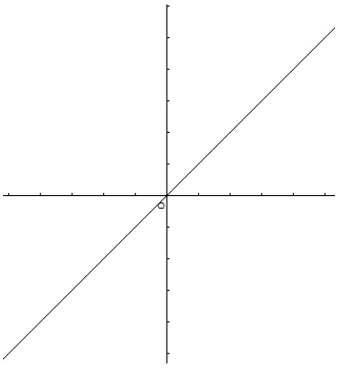
On définit de façon analogue : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Cas des fonctions usuelles :

Fonction identité

$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

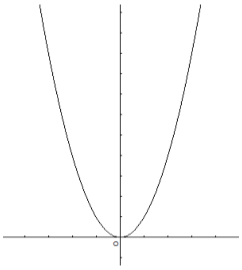
$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$



Fonction « carré »

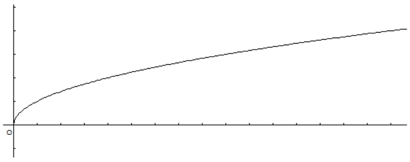
$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$



Fonction racine carrée

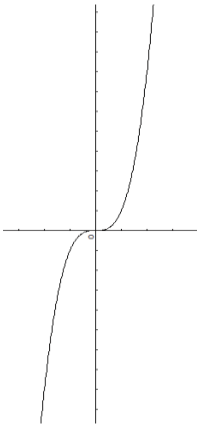
$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$



Fonction cube

$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$



2°/ Limite finie en $+\infty$, en $-\infty$. Asymptote horizontale

***Définition** :* Soit f une fonction définie sur un intervalle $[\alpha, +\infty[$ et l un nombre réel.

Dire que **f tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$** signifie que l'on peut rendre **les valeurs de $f(x)$** aussi **proches de l que l'on veut** dès que **x est suffisamment grand. On note :**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

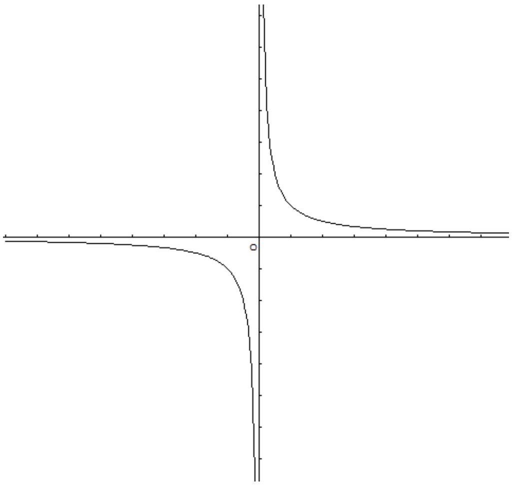
On définit de façon analogue : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$

Cas des fonctions usuelles :

Fonction inverse :

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

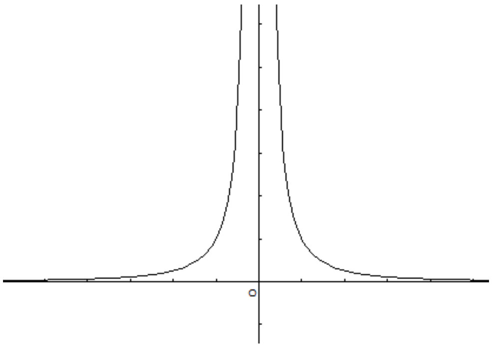
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$



Fonction : $x \mapsto \frac{1}{x^2}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$



Définition : ***Lorsque*** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ **(respectivement** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ **), on dit que la droite d'équation** $y = l$ **est *asymptote* (horizontale) à la courbe en** $+\infty$ **(respectivement en** $-\infty$ **)**

Cas des deux fonctions usuelles ci-dessus :

II. Limite en un réel a .

1°/Des exemples

Reprenons les deux fonctions ci-dessus, sur $]0; +\infty[$ **:**

on peut rendre $f(x)$ **aussi grand que l'on veut dès que x est assez proche de 0. On note :** $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ **et** $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$

La droite d'équation $x = 0$ **est *asymptote* (verticale) à la courbe représentant** f**.**

Ecrire la limite de la *fonction inverse* en 0, avec $x < 0$ **:**

2°/ Limite infinie en un réel. Asymptote verticale

Définition : Soit a un réel et f une fonction.

Dire que f **tend vers** $+\infty$ quand x **tend vers** a signifie que l'on peut rendre les valeurs de $f(x)$ **aussi grandes** que l'on veut dès que x **est suffisamment proche de** a.

On note : $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

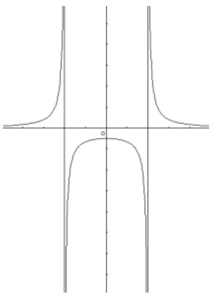
On définit de façon analogue : $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ $\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = +\infty$ ***ou*** $-\infty$ ***et*** $\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = +\infty$ ***ou*** $-\infty$

Définition : ***Lorsque*** $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ **(respectivement** $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ **), on dit que la droite d'équation** $x = a$ **est *asymptote* (verticale) à la courbe.**

Exemple :

Ecrire les limites en -2 et 2

Donner les équations des asymptotes



III. Opérations sur les limites

Afin de travailler sur des fonctions créées à partir des fonctions de référence, on se donne des règles opératoires sur les limites

Dans la suite : l et l' désignent des réels et a désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Cas de la somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

*F.I. signifie : **forme indéterminée**, on lèvera l'indétermination*

Exemples : $\lim_{x\to+\infty} x^2 + x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2}$

Cas du produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**0**	**0**
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**	**F.I.**

Exemples :

$\lim_{x\to-\infty} x^2 + x$ = $\lim_{x\to-\infty} x(x+1)$

(Remarque sur cette somme)

$\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^3$

Cas du quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	$l\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0	$l'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	F.I.	F.I.

Exemples :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3}{x^2+2}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x<5}} \dfrac{2}{x-5}$

III. Limite en l'infini d'une fonction polynôme, d'une fonction rationnelle

Un exemple : Soit $f : x \mapsto 3x^4 - x^3 + x - 2$, en $-\infty$ *et en* $+\infty$, on obtient une forme indéterminée.

Pour $x \neq 0$, $f(x) = x^4\left(3 - \frac{x^3}{x^4} + \frac{x}{x^4} - \frac{2}{x^4}\right) = x^4\left(3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4}\right)$

et

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} x^4 \ = \\ \lim_{x\to+\infty} 3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4} \ = \end{array}\right\} \text{ donc, par produit, } \lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

Résultat analogue en $-\infty$

Remarque : La limite de $f(x)$ est la même que celle de $3x^4$

Propriété (admise)

En $-\infty$ et en $+\infty$, une fonction polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré.

En $-\infty$ et en $+\infty$, une fonction rationnelle a la même limite que le quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

Exemples : $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x^2+4}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x+1}{x^2+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} =$

La courbe admet une

$g(x) = \frac{x+1}{x^2-5}$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x^2-5} =$

La courbe admet une

IV. Asymptote oblique

Définition et propriété : ***Si $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ avec $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$, alors la courbe de f se rapproche indéfiniment de la droite Δ d'équation $y = ax + b$ lorsque x tend vers $+\infty$.***
Δ est asymptote oblique à la courbe représentant f.

Propriété : ***Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, alors la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe représentant f.***

Résultats analogues en $-\infty$

Illustration :

$f(x) = x + 2 - \frac{1}{x}$