Partie C. Congruences dans $\mathbb{Z}$

1) *Activité* (*A traiter sur une feuille annexe*)

Le calendrier

On sait que le 1er janvier 2013 est un mardi. A partir de ce renseignement, on aimerait pouvoir déterminer le jour de la semaine de n'importe quelle date de 2013.

1. On se propose de chercher quel jour de la semaine tombe le 1er mai 2013.
   a. Quel est le nombre de jours, n, entre le 1er janvier 2013 et le 1er mai 2013 ? (ne compter qu'une seule des deux dates extrêmes)
   b. Déduire de ce nombre le nombre q de semaines qui se sont écoulées entre ces deux dates.
   c. Calculer alors le nombre r de jours restant entre ces deux dates pour atteindre le 1er mai. Ecrire n en fonction de q et r.
   d. En déduire quel jour de la semaine est le 1er mai 2013.
2. Déterminer de la même façon le jour de la semaine du 11 novembre 2013. (on utilisera les entiers n_1, q_1, r_1)
3. a. Même question pour le 25 décembre 2013 . (on utilisera les entiers n_2, q_2, r_2)
   b. On observe que le 1er mai 2013 et le 25 décembre 2013 tombent le même jour de la semaine ;
   Quelle remarque peut-on faire sur les nombres r et r_2 ?
   Les nombres n et n_2, qui ont **même reste dans la division par 7,** sont dits **congrus modulo 7 .**

2) *Congruences dans $\mathbb{Z}$*

a) Définition :

Soit un entier $n \geq 2$, a et b deux entiers relatifs.
a est congru à b modulo n (ou a *et* b sont congrus modulo n), si et seulement si, les divisions euclidiennes de a et de b par n ont le même reste.
On note alors : $a \equiv b\ (n)$ ou $a \equiv b\ [n]$ ou $a \equiv b$ *modulo* n ou $a \equiv b\ (mod\ n)$.

Exemples :

$11 = 4 \times 2 + 3$ et $7 = 4 \times 1 + 3$ donc $11 \equiv 7\ (4)$ ou $7 \equiv 11\ (4)$.

$16 \equiv 30\ \ (7)$ en effet : $16 =$ et $30 =$

$-121 \equiv 29\ \ (5)$ en effet : $29 =$ et $-121 =$

b) Propriétés :

Propriété immédiate

Soit un entier $n \geq 2$, et a et b deux entiers : $a \equiv a\ (n)$; si $a \equiv b\ (n)$ alors $b \equiv a\ (n)$

Propriété fondamentale

Soit un entier $n \geq 2$, et a et b deux entiers.

a est congru à b *modulo* n si, et seulement si, n divise $a - b$ (1)

a est congru à 0 *modulo* n si, et seulement si, n divise a (2)

Démonstration : sur feuille annexe

Propriété de transitivité

Soit un entier $n \geq 2$, a, b et c trois entiers.

si $a \equiv b\ (n)$ *et* $b \equiv c\ (n)$ *alors* $a \equiv c\ (n)$

Démonstration immédiate

Congruences et division euclidienne :

Soit deux entiers a et $n \geq 2$.

Tout entier relatif a est congru, modulo n, à un unique entier r tel que $0 \leq r \leq n-1$, soit :

$$a \equiv r \quad (n), \quad avec \ 0 \leq r < n.$$

Démonstration :

A l'aide de la division euclidienne de a par n, on sait qu'il existe un unique entier $r \in \{0 ; 1 ; \ldots ; n-1\}$ tel que :
$a = nq + r$ soit $a - r = nq$ d'où n divise $(a - r)$, donc $a \equiv r\ (n)$ avec $0 \leq r < n$.

Exemples :

- $23 = 7 \times 2 + 9$, mais $9 > 7$
  $23 = 7 \times 3 + 2$, avec $0 \leq 2 < 7$. 2 est le reste dans la division euclidienne de 23 par 7 ; $23 \equiv 2\ (7)$
  on peut écrire $23 \equiv 9\ (7)$, (mais 9 n'est pas le reste dans la division euclidienne de 23 par 7)
- $-15 = 2 \times (-8) + 1$ donc $-15 \equiv 1\ (2)$ avec $0 \leq 1 < 2$.
- Peut-on écrire $62 \equiv 27\ (7)$?

c) Congruences et compatibilité avec les opérations :

Théorème :

Soit un entier $n \geq 2$, et quatre entiers relatifs a, b, c et d,

$$si \ a \equiv b \ (n) \ et \ c \equiv d \ (n) \ alors \ a + c \equiv b + d \ (n) \quad et \quad a\,c \equiv b\,d \ (n)$$

de même, $a - c \equiv b - d \ (n)$

Conséquences :

Soit un entier $n \geq 2$ et a et b deux entiers.

Pour tout entier k, si $a \equiv b \ (n)$ alors $k\,a \equiv k\,b \ (n)$

Pour tout entier naturel *p non nul*, si $a \equiv b \ (n)$ alors $a^p \equiv b^p \ (n)$

Démonstrations : sur feuille annexe

Attention, $k\,a \equiv k\,b \ (n)$ n'implique pas $a \equiv b \ (n)$;

Ex : $16 \equiv 20\ (4)$ mais 8 et 10 ne sont pas congrus modulo 4.

3) *Exercices d'application de la définition et des propriétés*

Ex 1 : Soit a un entier tel que $a \equiv 9 \ (4)$. Démontrer que 4 divise $(3a + 1)$.

Ex 2 : Travailler ***sur l'écriture décimale*** d'un entier et démontrer ***les critères de divisibilité*** bien connus, par 2, par 5, par 3, par 9 et par 4. (aide : le livre page 24)

Ex 3 : $\overline{abc000900} \equiv m \ (7)$; trouver m sachant que $\overline{abc} \equiv 2\ (7)$.

Travail en autonomie : exercices de votre livre 9 et 10 p 23 ; 11 et 12 p 25