Exercice 1

1°/ $n \in \mathbb{N}$, cherchons les restes, r, de la division euclidienne de 2^n par 7 :

On peut dresser un tableau :

n	0	1	2	3	4	5
$2^n \equiv \cdots [7]$	1	2	4	1	2	4
restes	1	2	4	1	2	4

On observe une périodicité d'ordre 3

Soit $m \in \mathbb{N}$, tout entier naturel n s'écrit $3m$, $3m+1$ ou $3m+2$.

Si $\boldsymbol{n = 3m}$, $2^{3m} = (2^3)^m$, or $2^3 \equiv 1 \ [7]$, d'où $(2^3)^m \equiv 1 \ [7]$, $r = 1$

Si $\boldsymbol{n = 3m+1}$, $2^{3m+1} = (2^3)^m \times 2$, or $2^{3m} \equiv 1 \ [7]$, d'où $(2^3)^m \times 2 \equiv 2 \ [7]$, $r = 2$ (compatibilité des congruences avec la multiplication)

Si $\boldsymbol{n = 3m+2}$, $2^{3m+2} = (2^3)^m \times 2^2$, or $2^{3m} \equiv 1 \ [7]$, d'où $(2^3)^m \times 4 \equiv 4 \ [7]$, $r = 4$

Ainsi, les restes de la division euclidienne de $\mathbf{2^n}$ par 7 sont 1, 2 ou 4.

2°/ Soit $N = 2^{2k} + 2^k + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Si k n'est pas divisible par 3, alors $k = 3m+1$ ou $3m+2$, $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$

- ***Si*** $\boldsymbol{k = 3m+1}$, $alors\ N = 2^{2(3m+1)} + 2^{3m+1} + 1$

  $N = (2^{3m+1})^2 + 2^{3m+1} + 1$

  Or $2^{3m+1} \equiv 2 \ [7]$, donc $(2^{3m+1})^2 \equiv 2^2 \ [7]$, (compatibilité des congruences avec l'élévation à une puissance entière)

  Ainsi, $(2^{3m+1})^2 + 2^{3m+1} + 1 \equiv 2^2 + 2 + 1 \ [7]$, (compatibilité des congruences avec l'addition)

  $(2^{3m+1})^2 + 2^{3m+1} + 1 \equiv 7 \ [7]$, or $7 \equiv 0 \ [7]$, donc, par transitivité, $N \equiv 0 \ [7]$ et ***7 divise N***

- ***Si*** $\boldsymbol{k = 3m+2}$, $alors\ N = 2^{2(3m+2)} + 2^{3m+2} + 1$

  $N = (2^{3m+2})^2 + 2^{3m+2} + 1$

  Or $2^{3m+2} \equiv 4 \ [7]$, donc $(2^{3m+1})^2 \equiv 4^2 \ [7]$, (compatibilité des congruences avec l'élévation à une puissance entière)

  Ainsi, $(2^{3m+2})^2 + 2^{3m+2} + 1 \equiv 4^2 + 4 + 1 \ [7]$, (compatibilité des congruences avec l'addition)

  $(2^{3m+2})^2 + 2^{3m+2} + 1 \equiv 21 \ [7]$, or $21 \equiv 0 \ [7]$, donc, par transitivité, $N \equiv 0 \ [7]$ et ***7 divise N***

Exercice 2

$n \in \mathbb{N}$, montrons que si n n'est pas divisible par 5, alors le nombre $N = (n^2-1)(n^2-4)$ est divisible par 5.

On remarque que $N = (n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$ et,

si n n'est pas divisible par 5, alors $n = 5k+1\ ou\ 5k+2\ ou\ 5k+3\ ou\ 5k+4$,avec $k \in \mathbb{N}$

si $\boldsymbol{n = 5k+1}$, alors $N = (5k)(5k+2)(5k-1)(5k+3)$ **= $\boldsymbol{5K}$**, $où\ K = k(5k+2)(5k-1)(5k+3)$, **nombre entier**

ainsi N est divisible par 5.

si $\boldsymbol{n = 5k+2}$, le facteur $n-2$ est divisible par 5 , et donc N aussi

si $\boldsymbol{n = 5k+3}$, le facteur $n+2$ est divisible par 5 , il s'écrit 5k+5 = 5(k+1), et donc N est divisible par 5.

si $\boldsymbol{n = 5k+4}$, le facteur $n+1$ est divisible par 5 , il s'écrit 5k+5 = 5(k+1), et donc N est divisible par 5.

On a bien montré que, si n n'est pas divisible par 5, alors le nombre $N = (n^2-1)(n^2-4)$ l'est.

Autre méthode : considérons les 5 entiers consécutifs : $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$, parmi eux, un seul est divisible par 5 donc, si n n'est pas divisible par 5, alors l'un au moins des quatre autres l'est.

Autre méthode : Soit $n \in \mathbb{N}$ non divisible par 5. Alors $n \equiv 1[5]$ ou $n \equiv 2[5]$ ou $n \equiv 3[5]$ ou $n \equiv 4[5]$ (n est congru à son reste par la division par 5). Ensuite on raisonne par disjonction des cas : Si $n \equiv 1[5]$ alors $n^2 \equiv 1^2[5]$ et $n^2 - 1 \equiv 0[5]$ et par multiplication $N \equiv 0[5]$ donc N est divisible par 5. etc …