24 Utiliser la forme algébrique d'un quotient

Énoncé Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on associe à tout point M d'affixe z distincte de 2i, le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-3}{iz+2}$.

On désigne par A le point d'affixe 3 et par B celui d'affixe 2i.

1 On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y, x' et y' réels. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

2 Démontrer que l'ensemble Γ des points M du plan, tels que M' soit un point de l'axe des réels $(O\,;\vec{u})$, est le cercle de diamètre $[AB]$ privé d'un point que l'on précisera.

3 Résoudre l'équation $\dfrac{z-3}{iz+2} = 1$.

On désigne par K le point d'affixe $\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{2}i$.

Justifier sans calcul que $K \in \Gamma$.

Solution

1 $z' = \dfrac{x+iy-3}{i(x+iy)+2} = \dfrac{x-3+iy}{(2-y)+ix} = \dfrac{[(x-3)+iy][(2-y)-ix]}{(2-y)^2+x^2}$

$z' = \dfrac{[(x-3)(2-y)+xy]+i[y(2-y)-x(x-3)]}{(2-y)^2+x^2}$

$z' = \dfrac{2x+3y-6}{x^2+(2-y)^2} + i\dfrac{-x^2-y^2+3x+2y}{x^2+(2-y)^2}$.

Comme $\dfrac{2x+3y-6}{x^2+(2-y)^2}$ et $\dfrac{-x^2-y^2+3x+2y}{x^2+(2-y)^2}$ sont des **réels**, puisque x et y le sont aussi, cette écriture est **la forme algébrique de z'** et, du fait de son unicité on a : $\boldsymbol{x' = \dfrac{2x+3y-6}{x^2+(2-y)^2}}$ et $\boldsymbol{y' = \dfrac{-x^2-y^2+3x+2y}{x^2+(2-y)^2}}$.

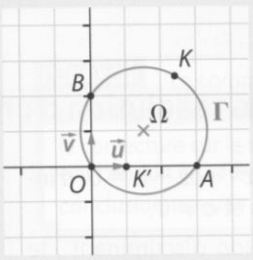
2 $M \in \Gamma \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 3x - 2y = 0$ et $x^2 + (2-y)^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{13}{4}$ et $(x\,;y) \neq (0\,;2)$.

Comme $(0\,;2)$ vérifie l'équation du cercle ci-dessus, on conclut que : Γ est le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{3}{2} + i\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$, privé du point $B(2i)$.

De plus, $\dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{3}{2} + i = z_\Omega$; donc Ω est le milieu du segment $[AB]$ et par suite Γ est bien le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B.



3 $\dfrac{z-3}{iz+2} = 1 \Leftrightarrow z - 3 = iz + 2 \Leftrightarrow z(1-i) = 5 \Leftrightarrow z = \dfrac{5}{1-i} = \dfrac{5(1+i)}{1+1}$.

L'équation a une seule solution dans $\mathbb{C}$: $\boldsymbol{\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{2}i}$.

$z_{K'} = 1$, donc K' appartient à l'axe des réels : K est donc un point de Γ.

Stratégies

1 On prépare le numérateur et le dénominateur pour voir clairement les parties réelles et les parties imaginaires. On multiplie « haut et bas » par le conjugué du dénominateur : on obtient au dénominateur **la somme des carrés** des parties réelle et imaginaire.

L'unicité de la forme algébrique permet d'identifier $x' = \mathrm{Re}(z')$ et $y' = \mathrm{Im}(z')$.

2 Pour mettre en évidence les éléments caractéristiques de Γ, on met l'équation du cercle sous forme canonique.

La non-nullité du dénominateur $x^2 + (2-y)^2 \neq 0$ est une autre façon de dire que $z \neq 2i$. En effet, la somme des carrés de deux nombres réels est nulle si, et seulement si, ces deux nombres sont nuls.

3 Contrairement au **1**, on résout en conservant l'inconnue z sans utiliser la forme algébrique.

25 Utiliser la forme exponentielle pour étudier une configuration

Énoncé On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3 + i\sqrt{3}$, $z_B = -\sqrt{3} + 3i$ et $z_C = z_A + z_B$.

1 Déterminer une forme exponentielle de z_A et de z_B.

2 En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, en radian.

3 Déterminer la nature du quadrilatère $OACB$.