Exercice sur les nombres complexes, avec application géométrique

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$) .
L'unité graphique est 4 cm. *(On ne représentera que la partie du plan correspondant aux parties réelles positives)*

1°/ On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante $(E)\ :\ z^3 - 8z^2 + 24z - 32 = 0$

a) Vérifier que $z_0 = 4$ est une solution de (E). Déterminer trois réels a, b *et* c tels que (E) s'écrive :

$$(E) :\ (z - 4)(az^2 + bz + c) = 0$$

b) Résoudre l'équation *(E)* ; on notera z_1 sa solution ayant une partie imaginaire positive et z_2 sa solution ayant une partie imaginaire négative.
Déterminer la forme exponentielle de z_1 et z_2 .

c) Démontrer que les images respectives M_0, M_1 *et* M_2 de z_0, z_1 et z_2 sont sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω d'affixe $\omega = 2$ et de rayon $R = 2$. Illustrer.

2°/ On considère la transformation f du plan qui, à tout point $M(z)$, distinct de O, associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$

a) Déterminer l'ensemble des points M invariants par f .

b) Démontrer que, pour tout nombre z non nul, $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = 0$ (modulo 2π) ; quelle déduction peut-on faire sur les points *O, M* et *M' ?*

c) Démontrer que, pour tout point M distinct de O, on a $OM \times OM' = 1$.

d) Calculer les affixes des points M_0', M_1' et M_2' , images par f , des points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives 4, $2 + 2i$ et $2 - 2i$; placer les points M_0', M_1' et M_2' sur la figure.

e) Soit M_3 l'image de M_1 par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.
Calculer l'affixe z_3 de M_3 puis l'affixe du point M_3' image de M_3 par f . Placer M_3' sur la figure.

f) Quelle conjecture peut-on faire au sujet de l'image du cercle $\mathcal{C}$ par la transformation f ?

Corrigé :

1) a) $4^3 - 8 \times 4^2 + 24 \times 4 - 32 = 64 - 128 + 96 - 32 = 0$ donc 4 est bien solution de (E)

$(z - 4)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 4az^2 - 4bz - 4c = az^3 + z^2(b - 4a) + z(c - 4b) - 4c$

$$(z - 4)(az^2 + bz + c) = z^3 - 8z^2 + 24z - 32 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = -8 \\ c\ 4b = 24 \\ -4c = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 8 \end{cases}$$ donc, (E) s'écrit: $(z - 4)(z^2 - 4z + 8) = 0$

b) $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 8 = 16 - 32 = -16 < 0$ donc le trinôme a deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{4 + 4i}{2} = 2 + 2i$ et $z_2 = 2 - 2i$ donc $\mathbf{S = \{4;\ 2 + 2i;\ 2 - 2i\}}$

$|z_1| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$ et $\cos(\arg(z_1)) = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\arg(z_1)) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\arg(z_1) = \dfrac{\pi}{4}$ et $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$

z_2 est le conjugué de z_1 donc $z_2 = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

c) $M_0\Omega = |4 - 2| = 2$ et $M_1\Omega = |2 + 2i - 2| = |2i| = 2$ et $M_2\Omega = |2 - 2i - 2| = |-2i| = 2$
donc les points sont sur le cercle de centre Ω et de rayon 2

2) a) M d'affixe z est un point invariant si $z = \dfrac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z \times \bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow$ M décrit le cercle de centre O et de rayon 1

b) $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) = \arg\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right) - \arg(z) = -\arg(\bar{z}) - \arg(z) = \arg(z) - \arg(z) = 0$ car $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

$\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) = (\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM'}) = 0\ \ [2\pi]$ donc les points O, M, M' sont alignés.

c) $z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$ donc $|z'| \times |\bar{z}| = 1 \Leftrightarrow |z'| \times |z| = 1 \Leftrightarrow OM' \times OM = 1$

d) $z_0' = \dfrac{1}{\bar{z_0}} = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$; $z_1' = \dfrac{1}{2 - 2i} = \dfrac{2 + 2i}{8} = \mathbf{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}i}$ et $z_2' = \dfrac{1}{2 + 2i} = \dfrac{2 - 2i}{8} = \mathbf{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}i}$

e) $z_3 - \omega = e^{i\pi/6}(z_1 - \omega) \Leftrightarrow z_3 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)(2 + 2i - 2) + 2 \Leftrightarrow z_3 = \sqrt{3}i - 1 + 2 = \mathbf{1 + \sqrt{3}i}$

$z_3' = \dfrac{1}{1 - \sqrt{3}i} = \mathbf{\dfrac{1 + \sqrt{3}i}{4}}$

f) **L'image du cercle est la droite d'équation $x = \dfrac{1}{4}$**