

[A] (E) $11x - 26y = 1, x, y \in \mathbb{Z}$

[1] $(-7; -3)$ solution de (E)

$\left\{ \begin{array}{l} 11 \times (-7) - 26 \times (-3) = -77 + 78 = 1 \\ \text{donc ce couple est solution de (E).} \end{array} \right.$

[2] Si (x, y) est une solution de (E)

alors $11x - 26y = 1$,

ou $(x_0, y_0) = (-7; -3)$ est solution de (E)

donc $11x - 26y = 11x_0 - 26y_0$

ou encore $11(x - x_0) = 26(y - y_0)$ (E')

$\left\{ \begin{array}{l} 11 \text{ divise } 26(y - y_0) \text{ et } 11 \text{ est premier} \\ \text{avec } 26 \text{ donc, d'après le théorème} \\ \text{de Gauss, } 11 \text{ divise } y - y_0 : \end{array} \right.$

$y - y_0 = 11k, k \in \mathbb{Z}$

$y = -3 + 11k$

• Reprenons dans (E') :

$11(x - x_0) = 26 \cdot 11k$

$x - x_0 = 26k$

d'où $x = -7 + 26k, k \in \mathbb{Z}$

Ainsi, si (x, y) est solution de (E), (x, y) est de la forme $(-7 + 26k; -3 + 11k), k \in \mathbb{Z}$

Réciproquement :

$\left\{ \begin{array}{l} \text{tout couple } (-7 + 26k; -3 + 11k), k \in \mathbb{Z} \\ \text{est-il solution de (E)} \end{array} \right.$

$11(-7 + 26k) - 26(-3 + 11k)$

$= -77 + 286k + 78 - 286k$

$= -77 + 78 = 1$

• Conclusion : les solutions de (E) sont les couples $(-7 + 26k; -3 + 11k), k \in \mathbb{Z}$

• Deducition : (u, v) solution de (E) tel que

$0 \leq u \leq 25$

$0 \leq -7 + 26k \leq 25 \Leftrightarrow 7 \leq 26k \leq 32$

$\Leftrightarrow \frac{7}{26} \leq k \leq \frac{16}{13}$

$\Leftrightarrow k = 1$

$(u, v) = (19; 8)$

[B] $0 \leq x \leq 25$

$x \mapsto 11x + 8 = f(x)$

y est le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26

[1] Chercher w

$x = 22$

$f(x) = 11 \times 22 + 8 = 250$

$y = 16 \quad (250 = 26 \times 9 + 16)$

lettre associée : Q

[2] Fonction de décodage

[a] x tel que $11x \equiv 1 \pmod{26}$

$11x \equiv 1 \pmod{26} \Leftrightarrow 11x - 26y = 1$

avec $y \in \mathbb{Z}$,

de plus $0 \leq x \leq 25$,

d'après la question [1], $x = 19$

[b] Décodage

$y \equiv 11x + 8 \pmod{26}$ et $0 \leq y \leq 25$

$19y \equiv 11 \times 19x + 8 \times 19 \pmod{26}$

ou $11 \times 19 \equiv 1 \pmod{26}$

d'où $11 \times 19x \equiv x \pmod{26}$

alors $x \equiv 19y - 8 \times 19 \pmod{26}$

de plus $8 \times 19 = 152$

$152 = 26 \times 5 + 22 \quad (\text{reste} = 22)$

donc $x \equiv 19y - 22 \pmod{26}$

Pour décoder :

• on repère la valeur de y associée à la lettre

• on calcule $19y - 22 = g(y)$

• on cherche le reste de la division de $g(y)$ par 26 : x

• on trouve alors la lettre correspondante

w correspond à $y = 22$

$19y - 22 = 396 \quad (396 = 15 \times 26 + 6)$

le reste x est 6

la lettre correspondante est G