Produit scalaire et nombres complexes

I. Produit scalaire et trigonométrie

Activité préparatoire :

voir le livre page 178

Objectif : ***A l'aide du produit scalaire, trouver la valeur exacte du cosinus de $\frac{\pi}{12}$.***

Pré-requis : ***lien 1 (cercle trigonométrique)*** , ***lien 2 (produit scalaire)***

Sur la figure ci-dessous, on a placé les points A et B sur le cercle trigonométrique.

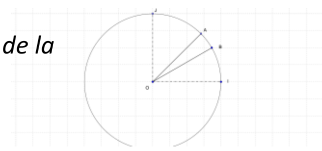
L'angle $(\overrightarrow{OI};\ \overrightarrow{OA})$ mesure $\frac{\pi}{4}$ radians et l'angle $(\overrightarrow{OI};\ \overrightarrow{OB})$ mesure $\frac{\pi}{6}$ radians.

1. *Donner les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$:*

   de $\overrightarrow{OB}$:

2. *Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB})$:*

3. *Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ à l'aide de la formule analytique :*



4. *Pourquoi a-t-on $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = cos\,\frac{\pi}{12}$?*

5. *Des questions 3 et 4 déduire alors la valeur exacte de $cos\,\frac{\pi}{12}$.*

II. Les formules de trigonométrie

1°/ Les formules d'addition

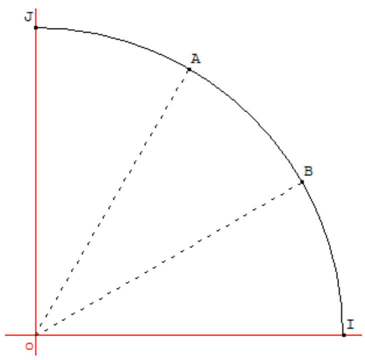
Avec les points A et B sur le cercle trigonométrique, *voir figure ci-dessous (à compléter)*

l'angle $(\overrightarrow{OI};\ \overrightarrow{OA})$ mesurant a radians, l'angle $(\overrightarrow{OI};\ \overrightarrow{OB})$ mesurant b radians ; l'angle $(\overrightarrow{OB};\ \overrightarrow{OA})$ mesure $a-b$ radians.

Le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ exprimé de deux façons différentes donne, d'une part : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = cosa\ cosb\ +\ sina\ sinb$

d'autre part : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos(a-b)$

ou encore : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 1 \times 1 \times \cos(a-b) = \cos(a-b)$ *, d'où la formule.*



Pour tous nombres réels a et b ,

$$\boldsymbol{cos(a-b) = cosa\ cosb\ +\ sina\ sinb}$$
$$\boldsymbol{cos(a+b) = cosa\ cosb\ -\ sina\ sinb}$$

$$\boldsymbol{sin(a-b) = sina\ cosb\ -\ sinb\ cosa}$$
$$\boldsymbol{sin(a+b) = sina\ cosb + \ sinb\ cosa}$$

Démonstrations faites en exercices, en utilisant des relations vues en Première.

Applications :

1. *A l'aide des formules d'addition , déterminer les valeurs exactes de* $sin(\frac{5\pi}{12})$ *et* $cos(\frac{7\pi}{12})$

   Remarque : $\boldsymbol{\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}}$ *et* $\boldsymbol{\frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}}$

$sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) =$

$cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) =$

2. *Transformer des écritures à l'aide des formules d'addition :*
   a. *Pour tout réel x, vérifier l'égalité suivante :* $2\cos\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{2x}{3}\right)+\sin\left(\frac{2x}{3}\right)$

   b. *Etablir une égalité du même type pour* $\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)$, *puis pour* $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

2°/ Les formules de duplication et de linéarisation

En reprenant $cos(a+b)$ et en remplaçant b par a, on obtient $cos(a+a)=$
ou encore $cos(2a)=$

De même, $sin(2a)=sin(a+a)=$

Pour tout nombre réel a, $\boldsymbol{cos(2a)=cos^2(a)-sin^2(a)}$

$\boldsymbol{cos(2a)=2cos^2(a)-1}$

$\boldsymbol{cos(2a)=1-2\,sin^2(a)}$ ***(démonstration en exercices de ces deux autres formules)***

$\boldsymbol{sin(2a)=2\,sina\,cosa}$

On peut aussi exprimer cos^2a et sin^2a en fonction de $cosa$; cela s'appelle ***linéariser.***

Formules de linéarisation :

Pour tout réel a, $\boldsymbol{cos^2a=\frac{1+cos\,2a}{2}}$ $\boldsymbol{sin^2a=\frac{1-cos\,2a}{2}}$ ***(démonstration en exercices)***

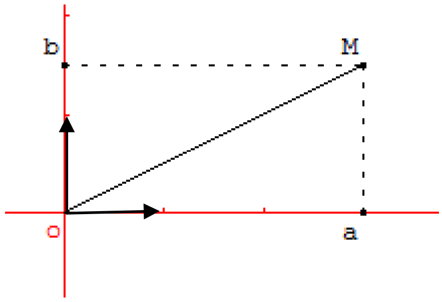
Applications :

1. *A l'aide de ces formules, et en remarquant que* $\frac{\pi}{6}=2\times\frac{\pi}{12}$, *calculer les valeurs exactes de* $cos\frac{\pi}{12}$ *et* $sin\frac{\pi}{12}$.

2. *Exprimer, pour tout réel ,* $cos^2\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$ *en fonction de* $cos\left(4t+\frac{\pi}{3}\right)$;
   puis $sin^2\left(3t+\frac{\pi}{8}\right)$ *en fonction de* $cos\left(6t+\frac{\pi}{4}\right)$.

III. Nombres complexes

1°/ De la forme algébrique à la forme trigonométrique



Soit z un nombre complexe écrit ***sous forme algébrique*** : $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$
Dans le plan complexe (plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, orienté dans le sens direct),
le point M de coordonnées $(a; b)$ est ***l'image de z*** ou encore z est ***l'affixe de M***.

La distance OM est égale à $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
(c'est le ***module*** *de z , nombre réel positif)*

Dans le cas où z est non nul, *l'angle* $(\vec{u}\,; \overrightarrow{OM})$ est appelé argument de z ; appelons-le θ pour la suite.

La forme trigonométrique de z est $\boldsymbol{z = r(cos\theta + isin\theta)}$ ***où*** $\boldsymbol{r = |z|}$ ***et*** $\begin{cases} \boldsymbol{cos\theta = \frac{a}{r}} \\ \boldsymbol{sin\theta = \frac{b}{r}} \end{cases}$

Exemples :

1. Soit $z = 1 + i$, écrire z sous forme trigonométrique
On calcule $|z|$, puis $cos\theta$ *et* $sin\theta$, on peut donc en déduire une valeur de θ et écrire la forme trigonométrique.

$r = |z| = |1 + i\,| =$

$cos\theta =$

$sin\theta =$ on en déduit $\theta =$

et donc la forme trigonométrique est : $\boldsymbol{z =}$

2. Soit $z = 1 - i\sqrt{3}$, écrire z sous forme trigonométrique.

2°/ Les arguments d'un produit

Activité *du livre page 180*
Soit z et z' deux nombres complexes de module 1.
Sous forme trigonométrique, ils s'écrivent : $z = cos\theta + isin\theta$ et $z' = cos\theta' + isin\theta'$ où θ *et* θ' sont leurs arguments respectifs.
Faisons le produit zz' ; $zz' = (\,cos\theta + isin\theta)(cos\theta' + isin\theta')$

$zz' =$

$zz' =$

$zz' =$

On obtient donc la forme trigonométrique de zz'
Et on peut en déduire qu' ***un argument du produit*** $\boldsymbol{zz'}$ ***est égal à la somme des arguments ,*** $\boldsymbol{\theta + \theta'}$.

3°/ L'écriture exponentielle d'un nombre complexe

Notation : ***Pour tout nombre réel*** $\boldsymbol{\theta}$***, on pose*** $\boldsymbol{cos\theta + isin\theta = e^{i\theta}}$

Propriété : ***Pour tous nombres réels*** $\boldsymbol{\theta}$ ***et*** $\boldsymbol{\theta'}$***, on a*** $\boldsymbol{e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}}$ ***d'après le résultat établi au 2°***

Définition : ***Soit z un nombre complexe non nul, de module r et d'argument θ,***
l'écriture $z = re^{i\theta}$ est l'écriture exponentielle de z (ou encore forme exponentielle) .

Exemples

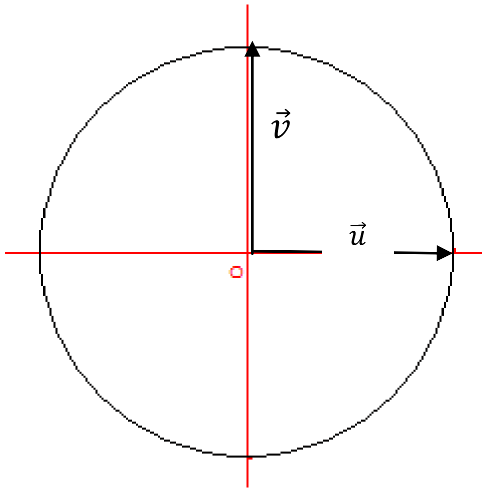
On a vu précédemment que $1 + i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4})$, *la forme exponentielle est* $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

D'autre part, $1 - i\sqrt{3} = 2(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right))$, *la forme exponentielle est* $z =$

Quelques cas particuliers : $e^{i\frac{\pi}{2}} =$; $e^{i\pi} =$; $e^{i0} =$

Repérons leurs images dans le plan complexe .
Le cercle tracé est le cercle trigonométrique.

Remarque sur les complexes de module 1 :



4°/ Produit, quotient, inverse et conjugué

Les nombres r et r' sont des réels strictement positifs, les nombres θ et θ' sont des réels.

Pour tous nombres complexes non nuls $re^{i\theta}$ et $r'e^{i\theta'}$, $\boldsymbol{re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'\,e^{i(\theta+\theta')}}$

Le module d'un produit est le produit des modules

Un argument du produit est la somme des arguments (à 2π près)

Exemple : Reprendre les formes exponentielles trouvées au 3° et exprimer le produit de ces deux nombres :

Pour tous nombres complexes non nuls $re^{i\theta}$ et $r'e^{i\theta'}$, $\boldsymbol{\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}}$

Le module d'un quotient est le quotient des modules

Un argument du quotient est la différence des arguments (à 2π près)

Pour tout nombre complexe non nul $re^{i\theta}$, $\boldsymbol{\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}}$

Pour tout nombre complexe non nul $re^{i\theta}$, le conjugué de $re^{i\theta}$ est $\boldsymbol{\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}}$

Applications :

Soit les deux nombres complexes : $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, calculer $z_1 \times z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\overline{z_1}$ et $\overline{z_2}$

Série d'exercices n° 1