Exercices sur le PPCM (corrigés)

Navigation et PPCM (phare et émissions simultanées de feux)

Un phare émet trois feux différents : rouge, vert et blanc ; première coïncidence des trois : à minuit.

1. On cherche les instants des émissions simultanées, deux à deux.

On connaît les périodes d'émission de chaque feu, *rouge :* 16s, *vert :* 45s et *blanc :* 2min20s , soit 140s

Pour deux feux choisis, l'intervalle de temps séparant deux émissions simultanées est le PPCM des périodes d'émission de ces deux feux.

Un calcul facile des PPCM peut se faire en utilisant les décompositions des nombres en produits de facteurs premiers : $16 = 2^4$; $45 = 3^2 \times 5$; $140 = 2^2 \times 5 \times 7$

a) Feux rouge et vert. $PPCM(16\,;45) = 16 \times 45 = 720$; ***la prochaine coïncidence a lieu à 0 h 12 min,***
les suivantes, à 0 h 24min, 0 h 36 min, 0 h 48 min, 1h, etc … en résumé, à 00, 12, 24, 36, 48 min de chaque heure.

b) Feux rouge et blanc. $PPCM(16\,;140) = 2^4 \times 5 \times 7 = 560$; ***la prochaine coïncidence a lieu à 0 h 9 min 20s***
les suivantes, à 0 h 18min 40s, 0 h 28 min, 0 h 37 min 20 s, etc …

c) Feux vert et blanc. $PPCM(45; 140) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260$; ***la prochaine coïncidence a lieu à 0 h 21min***
les suivantes, à 0 h 42min, 1 h 3 min , 1 h 24 min etc …

2. ***On cherche la prochaine coïncidence des trois feux***

De la même façon,

l'intervalle de temps séparant trois émissions simultanées est le PPCM des périodes d'émission de ces feux.

On calcule le PPCM de 16, 45 et 140. ***PPCM(16 ;45 ;140) = PPCM [16 ; PPCM(45 ;140)]*** = *PPCM(16 ; 1260) = 5 040*

5040 s correspond à 84 minutes, soit 1 h 24 min. ***La prochaine coïncidence des trois feux a lieu à 1 h 24 min.***

3. On cherche au bout de combien de jours les feux émettront simultanément à minuit.

Dans une journée, il y a 86 400 secondes, la première coïncidence est à 0h,

la période entre deux instants indiquant « minuit » est 86 400 s

la période d'émissions simultanées des trois feux est 5 040 s

On calcule donc PPCM(86 400 ; 5 040) , il vaut 604 800 ; or, 604 800 s correspondent à 7 jours

Au bout de 7 jours, les trois feux émettront simultanément à minuit.

Exercice

On cherche les sont des entiers naturels non nuls a et b, avec a< b, solutions du système (S) suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{PGCD(a;b) = b - a} \\ \boldsymbol{PPCM(a;b) = 228} \end{cases}$$

1. Démontrer que a et b vérifient $\boldsymbol{PGCD(a;b) = b - a}$ ***si, et seulement si, il existe*** $\boldsymbol{k \in \mathbb{N}^*}$ ***tel que*** $\boldsymbol{a = kd}$ ***et*** $\boldsymbol{b = (k+1)d}$, ***où*** $\boldsymbol{d = PGCD(a;b)}$.

2. Démontrer que a et b sont solutions de (S) si, et seulement si, $\boldsymbol{dk(k+1) = 228}$, ***où k est défini au 1.***

3. Décomposer 228 en produit de facteurs premeirs et en déduire toutes les solutions de (S).

Solution :

1. $d = PGCD(a\,;b)$ si, et seulement si, il existe deux entiers naturels k *et* k' premiers entre eux tels que
$a = kd$ et $b = k'd$.

$d = b - a$ *si, et seulement si,* $d = d(k' - k)$,

si, et seulement si, $1 = k' - k$,

si, et seulement si, $k' = k + 1$

$\boldsymbol{d = b - a}$ ***si, et seulement si, il existe*** $\boldsymbol{k \in \mathbb{N}^*}$ ***tel que*** $\boldsymbol{a = kd}$ ***et*** $\boldsymbol{b = (k+1)d}$

2. Posons $m = PPCM(a\,;b)$; on a , *md = ab,* soit $md = kdk'd$, ou encore $m = kk'd$.

a et b sont solutions de (S) si, et seulement si, $d = b - a \; et \; m = 228$

si, et seulement si, $k' = k + 1 \; et \; m = 228$

si, et seulement si, $228 = k(k+1)d$

3. $228 = 2^2 \times 3 \times 19$ *;*

on cherche les décompositions possibles de 228 en produit de ***trois entiers dont deux consécutifs.***

On a $228 = 1 \times 2 \times 114 \;\; ou \;\; 228 = 2 \times 3 \times 38 \;\; ou \;\; 228 = 3 \times 4 \times 19$

Donc, $k = 1 \; et \; d = 114$, *alor s* $\boldsymbol{a = 114 \; et \; b = 228}$

ou $k = 2 \; et \; d = 38$, *alors* $\boldsymbol{a = 76 \; et \; b = 114}$

ou $k = 3 \; et \; d = 19$, *alors* $\boldsymbol{a = 57 \; et \; b = 76}$

Les solutions du système sont les couples : (114 ; 228), (76 ; 114) et (57 ; 76)