Exercices d'études de limites, avec corrigés, réponses ou aide

Exercice1

Soit f la fonction définie sur $I =]\frac{\pi}{2} ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x - \cos x}$

Démontrez que *pour tout nombre réel x supérieur à 2,* $\frac{1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x-1}$

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice 2

Etudier les limites des fonctions suivantes.

1°/ $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x+2}$ en a = -2 , en a = $-\infty$.

2°/ $f(x) = \frac{\sin 5x}{x}$ en a = 0

3°/ $f(x) = \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ en a = 1. Quelle déduction graphique peut-on faire ?

Exercice3

Etudiez la limite des suites (u_n) , (t_n) et (w_n) :

1°/ $u_n = n(-1)^n$; 2°/ $t_n = \frac{(-1)^n}{-n}$; 3°/ $w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Corrigé de l'exercice 1

Pour tout x de I, $-1 \leq \cos x \leq 1$, d'où $-1 \leq -\cos x \leq 1$ et : $x - 1 \leq x - \cos x \leq x + 1$

Et, pour $x \geq 2$, on a $0 < x - 1 \leq x - \cos x \leq x + 1$,

D'où , $\frac{1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x-1}$, la fonction inverse étant décroissante sur]0 ; + ∞[

Etude de limite en + ∞ : $\lim_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ *donc* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} x-1 = +\infty \ donc \ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

Donc, en appliquant *le théorème des gendarmes,* on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Exercice 2 : aide et réponses

1°/ en a = -2, -2 est racine de x^2-x-6, donc simplifier par x+2

en a =-∞, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$

2°/théorème de limite de fonction composée, ou poser X = 5x ; $\lim_0 f = 5$

3°/ réponse -∞, asymptote d'équation x = 1 .

Exercice 3

1°/ pas de limite 2°/ par encadrement ; lim t_n = 0 3°/ avec expression conjuguée : lim w_n = 0