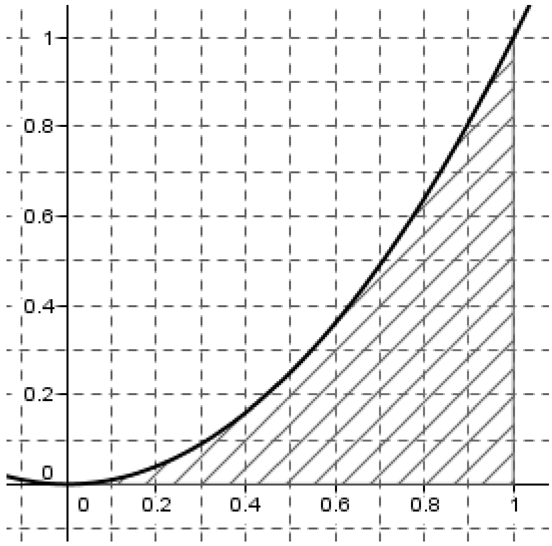
Intégration

I. Introduction à la notion d'intégrale d'une fonction continue positive : définition graphique.

1) Activité : aire sous la parabole

(*A traiter sur feuille annexe*)



La courbe C représente dans un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x^2$. On cherche à évaluer l'aire de la partie E du plan hachurée dite « aire sous la courbe C», représentée ci-contre.

A) Unité d'aire

1. Donner un encadrement de l'aire par des nombres entiers de petits carreaux.
2. En déduire un encadrement de $aire(E)$ exprimé en unité d'aire (1 unité d'aire est l'aire du rectangle de longueur $[OI]$ et de largeur $[OJ]$).
3. Si les unités graphiques sont 6 cm pour OI et 5 cm pour OJ, donner un encadrement de $aire(E)$ exprimé en cm^2.

B) Méthode des rectangles

Pour ≥ 2 , on subdivise l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles de même longueur. On construit des rectangles ayant pour base ces n intervalles et dont un sommet appartient à la courbe représentative de *f.*

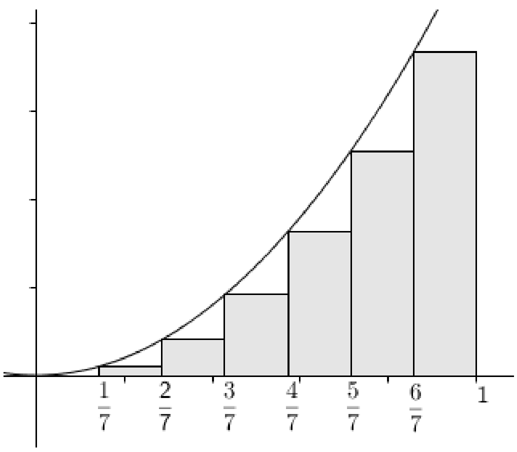
1. Construction sur GeoGebra

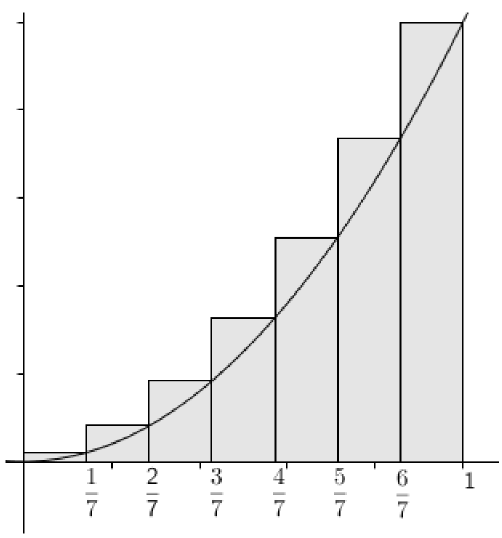
a. Dans le menu *Options,* choisir *Arrondi* puis *3 décimales.* Créer la fonction *f* en entrant $f(x) = x^2$ dans la zone de saisie. Créer la droite d'équation $x = 1$.
Créer un curseur n de 1 à 100 avec un pas de 1. Le régler à $n = 4$.
b. Entrer dans la zone de saisie **a=SommeInférieure[f,0,1,n]**.
Combien de rectangles sont tracés ? Indiquer les dimensions de chacun. Calculer leur aire totale a_4 et la comparer avec la valeur de a donnée par le logiciel.
c. Entrer **b=SommeSupérieure[f,0,1,n].** Calculer l'aire totale b_4 des rectangles ainsi tracés et comparer avec la valeur de b affichée par le logiciel.
d. Quel encadrement de $aire(E)$ peut-on conjecturer ?
e. Que se passe-t-il sur le logiciel quand n devient grand ?

2. Cas général

Pour $n \geq 2$, on note a_n la somme des aires des rectangles contenus dans E et b_n la somme des aires des rectangles « contenant » E.

a. Régler n à 7. Exprimer a_7 et b_7 en fonction de $f(0), f(\frac{1}{7}), f\left(\frac{2}{7}\right), \dots, f(\frac{7}{7})$.





b. De même, pour $n \geq 2$, exprimer a_n et b_n en fonction des $f(\frac{k}{n})$ pour $0 \leq k \leq n$.

c. On a montré par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

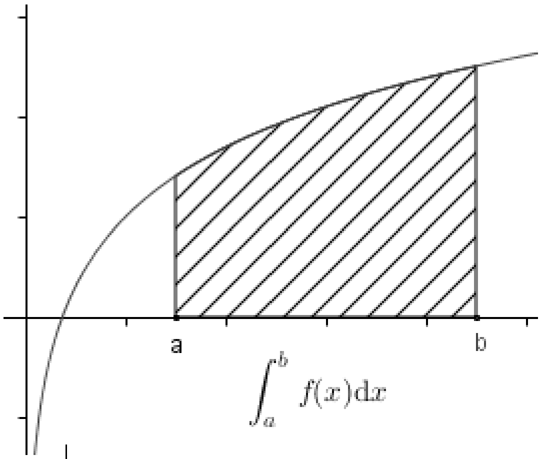
En déduire a_n et b_n en fonction de n et montrer que les suites $(a_{n)}$ et (b_n) convergent vers la même limite. Que peut-on proposer pour $aire(E)$?

2) Aire sous la courbe d'une fonction continue à valeurs positives

Définition : Soit $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (avec $a \leq b$) continue telle que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$. On appelle intégrale de a à b de la fonction f l'aire du domaine délimité par :

- L'axe des abscisses.
- Les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
- La courbe de f.

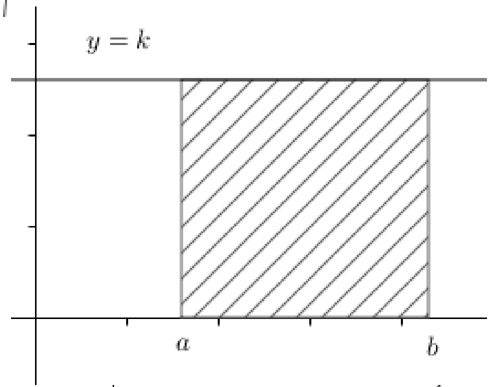
On note cette aire $\int_a^b f(x)dx$, elle est appelé « aire sous la courbe de f ».



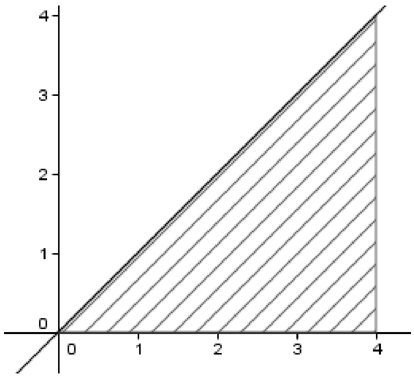
Exemples :

1) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ une fonction constante et positive , c'est-à-dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = k$ où $k \geq 0$.

Alors $\int_a^b f(x)dx = \dots\dots$

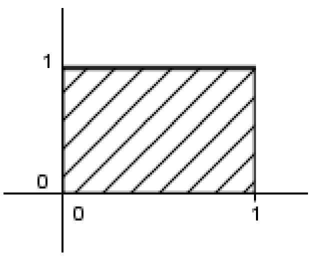


2) Soit f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x$. Alors $\int_0^4 f(x)dx =$



3) Soit f une fonction positive alors $\int_a^a f(x)dx = 0$.
En effet l'aire sous la courbe est l'aire d'un segment donc elle est égale à 0.

Remarque : l'intégrale d'une **fonction positive** s'exprime en unités d'aires (ua), l'unité d'aire correspond à l'aire du rectangle de dimension 1 unité d'abscisse et 1 unité d'ordonnée (figure ci-contre)



Attention : Revenons sur l'exemple 2) ci-dessus. $\int_0^4 f(x)dx = 8\ ua$ mais si l'unité du repère est 3 cm pour les abscisses et les ordonnées alors pour trouver l'aire correspondante en cm^2 il faudra multiplier par ….

En effet 1 $ua = \cdots \times \ldots = \cdots cm^2$.

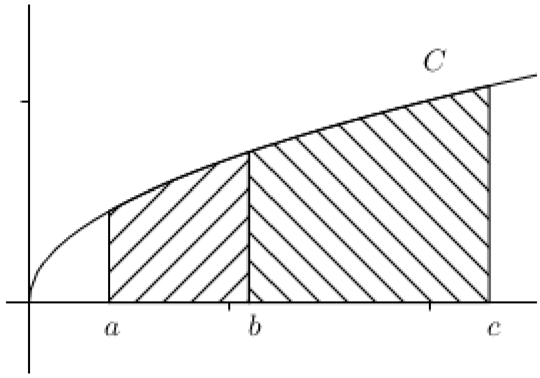
Travail en autonomie : 1 et 2 p 167

3) Premières propriétés

a) Additivité des aires (relation de Chasles)

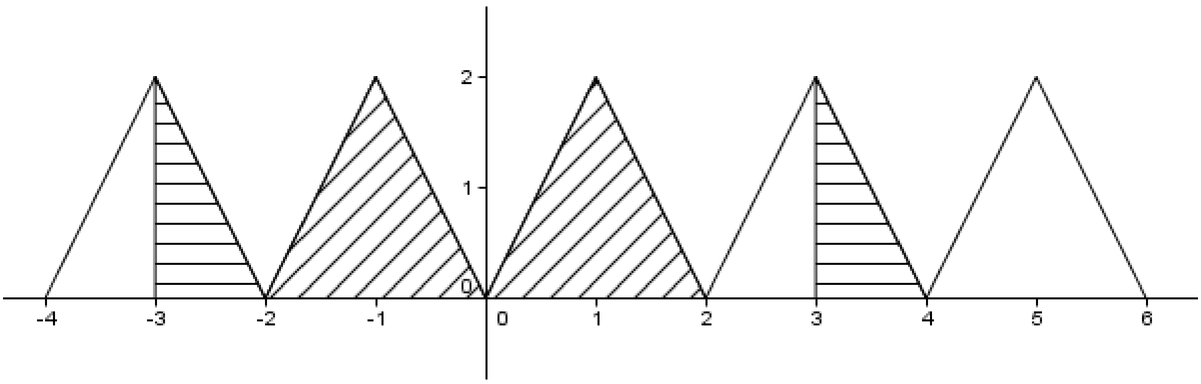
Proposition : Soit $f : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$ et b réel tels que f est continue et positive et $a < b < c$. Alors :

$$\boxed{\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx}$$



b) Conservation par symétrie et translation

Voyons cela sur un exemple, celui d'une fonction f définie sur $[-4; 4]$ représenté ci-dessous et qui modélise un signal en dent de scie obtenu en électronique :



- Les triangles hachurés à 45° se correspondant par symétrie d'axe l'axe des ordonnées on en déduit :

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$$

- Les triangles hachurés horizontalement se correspondant par translation de vecteur $6\vec{\imath}$ ($\vec{\imath}$ étant le vecteur unité des abscisses on en déduit :

$$\int_{-3}^{-2} f(x)dx = \int_3^4 f(x)dx$$

II. Intégrales et primitives

1) Notion de primitive

Définition : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle primitive de f sur un intervalle I toute fonction dérivable F sur I telle $F' = f$.

Exemples :

- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ a pour primitive la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \cdots$ car F est …………. sur $\mathbb{R}$ et $F' =$…

- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$ a pour primitive la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \cdots$ car F est ………….. sur $\mathbb{R}$ et $F' = \ldots$

<u>Travail en autonomie</u> : 4 p 169 et 62 p 180

2) <u>Tableaux de primitives</u>

Les fonctions f et F sont définies sur I.

Fonction f définie par :	I	Une primitive F définie par :
$f(x) = a, a\ réel$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f(x) = x^n$, $n\ entier, n \neq 0, n \neq -1$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$, si $n<0$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = cosx$	$\mathbb{R}$	$F(x) = sinx$
$f(x) = sinx$	$\mathbb{R}$	$F(x) = -cosx$
$f(x) = \cos(ax+b),\ a \neq 0$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$f(x) = \sin(ax+b),\ a \neq 0$	$\mathbb{R}$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = e^x$

<u>*Exemples*</u> :

- Sur $\mathbb{R}$ la fonction f définie par $f(x) = 5$ a pour primitive……………………………………………………….

- Sur $\mathbb{R}$ la fonction f définie par $f(x) = x^4$ pour primitive……………………………………………………….

- Sur $]0, +\infty[$ la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^6}$ s'écrit $f(x) = x^{\cdots}$ (On passe à la forme x^n avec un exposant négatif) Donc f a pour primitive sur $\mathbb{R}^*$ $F(x) = \cdots \ldots . = \cdots \ldots$

<u>Travail en autonomie</u> : 5 p 171

Formes remarquables pour déterminer une primitive

La fonction u est dérivable sur I

Fonction f définie par :	**Condition sur I**	**Une primitive F définie par :**
$f = u'u^n$, n *entier et* $n > 0$		$F = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$f = u'u^n$ n *entier*, $n < 0$ *et* $n \neq -1$	$u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$F = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$	$F = 2\sqrt{u}$
$f = u'e^u$		$F = e^u$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$	$F = \ln\ u$

Remarque :

- Comme la dérivée de la somme de deux fonctions est égale à la somme des dérivées, une primitive de la somme de deux fonctions peut être obtenue comme la somme de deux primitives des fonctions en question.

  Par exemple une primitive de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos(x)$ est : $F(x) = \cdots + \cdots$

  De plus si f a pour primitive F et k est un réel alors une primitive de kf est la fonction kF.

  Par exemple une primitive de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2$est : $F(x) = \cdots$

  En combinant les deux éléments, une primitive de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 8x^3 + 5x^2 + x - 1$ est :

  $F(x) = \cdots$

Méthode : pour déterminer une primitive F d'une fonction f sur I, on essaiera de faire apparaitre une des formes remarquables de la colonne de gauche du tableau précédent.

Exemples :

Forme $u'u^n$ avec $n > 0$

$I = \mathbb{R}$, pour tout $x \in I$, $f(x) = x^2(x^3+1)^5$. On pose $u(x) = \cdots$ …. Donc $u'(x) = \cdots$

$f(x) = \cdots$

Forme $u'u^n$ avec $n < 0$

$I = \mathbb{R}$, pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{3x}{(x^2+1)^4}$. On pose $u(x) = \cdots$ … . Donc $u'(x) = \cdots$ On a bien pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$

$f(x) = \cdots$

<u>Forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$</u>

$I =]-\pi, \pi[$, pour tout $x \in I$, $f(x) = -\frac{3\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$. On pose $u(x) = \cdots$.... Donc $u'(x) =$ ... On a bien pour tout $\in I$, $u(x) > 0$

$f(x) = \cdots$

<u>Forme $u'e^u$</u>

$I = \mathbb{R}$, pour tout $x \in I$, $f(x) = (2x+4)e^{3x^2+12x}$

$f(x) = \cdots$

<u>Forme $\frac{u'}{u}$</u>

- $I = \mathbb{R}$, pour tout $x \in I, f(x) = \frac{8x}{5x^2+1}$. On pose $u(x) = \cdots$.... Donc $u'(x) = \cdots$.
  On remarque que pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$ donc une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln(u)$.
  $f(x) = \cdots$

- $I =]2, +\infty[$, pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$. On pose $u(x) = \cdots$.... Donc $u'(x) = \cdots$. Soit on étudie le signe de u sur I pour savoir quelle formule on applique $\ln(u)$ ou $\ln(-u)$, soit on applique directement $ln|u|$, sans se soucier du signe de u. On héritera alors d'une valeur absolue, ce qui ne posera pas de problème dans la plupart des calculs d'intégrales que l'on fera à l'aide des primitives (voir plus loin).
  $f(x) = \cdots$

<u>Remarque importante</u> : Les tableaux précédents permettent d'obtenir des primitives de fonctions mais cette approche est limitée, comme le montre par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$. De manière générale, on peut dériver toute fonction dérivable dont on connaît l'expression et ceci est faux quant à l'obtention de primitives, même si des méthodes plus ou moins complexes existent.

<u>Travail en autonomie</u> : 6 p 171 et 86 p 181

3) <u>Non unicité des primitives</u>

<u>Tout d'abord une constatation :</u> La fonction carrée sur $\mathbb{R}$ admet au moins deux primitives :..................... et ....

<u>Remarque</u> : Il n'y a pas unicité des primitives d'une fonction mais on a mieux :

<u>Proposition</u> : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive F sur ***<u>I un intervalle de</u>*** $\mathbb{R}$. Alors les autres primitives de f sur I sont les fonctions qui s'écrivent :

$\boxed{G(x) = F(x) + k}$ où k est un réel

<u>Preuve</u> : Supposons que G est une primitive de f sur I alors G est dérivable et $G' = \cdots$ Posons $H = G - f$ alors H est dérivable en tant que .... de fonctions dérivables et $H' = \cdots - \cdots = \cdots - \cdots = \cdots$ donc H est .... Et donc $H(x) = k$ pour tout $x \in I$ où k est un réel et ainsi $G(x) = \cdots + \cdots$

Réciproquement : Soit G une fonction qui s'écrit $G(x) = F(x) + k$ alors
……

Exemple : Les primitives de la fonction carrée sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions qui s'écrivent …………………………………………………

4) Unicité de la primitive vérifiant une condition initiale

Proposition : Soit $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant au moins une primitive sur un intervalle I. Soient x_0 un élément de I et y_0 un réel. Alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Preuve :

f admet une primitive sur I, disons G. Soit F la fonction définie sur I par $F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$. Alors F est dérivable sur I en tant que ………………… de fonctions dérivables sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = \cdots = \cdots$ Donc F est une primitive de f sur I. De plus $F(x_0) =$

On a ainsi montré l'existence d'une primitive vérifiant la condition $F(x_0) = y_0$, montrons l'unicité :

Tout primitive H de f sur I s'écrit $H(x) = G(x) + k$ pour tout $x \in I$, avec k un réel. Si de plus elle vérifie la condition initiale alors $H(x_0) = y_0$ ce qui s'écrit $\dots\dots + \cdots \dots = y_0$ et donc $k = \cdots \dots \dots$ et ainsi $H(x) = F(x)$ pour tout $x \in I$ ce qui montre l'unicité de H.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)\sin(x)$. Déterminer **la** primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$.

Une primitive F de f s'écrit $F(x) =$……………………… Déterminons k :……………………… ………………………………………………………

………………. ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………………

5) Existence d'une primitive d'une fonction continue sur un intervalle

a) Activité 2, (2) p 164

A traiter sur feuille annexe

b) Le théorème

Théorème : **Soient $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et positive sur un intervalle I et $a \in I$.**

Alors la fonction définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Preuve sur feuille annexe (dans la cas où f est croissante et positive)

Travail en autonomie : 3 p 169

6) Primitives et calcul intégral

Théorème : Soient $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et positive sur un intervalle I contenant deux réels a et b, et F une primitive de f sur I. Alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Notation : la différence $F(b) - F(a)$ se note $[F(x)]_a^b$

Preuve : Posons, pour tout $\in [a, b]$, $G(x) = F(x) - F(a)$. G est dérivable sur $[a, b]$ et :

- Pour tout $x \in [a, b]$, $G'(x) = \cdots$
- $G(a) = \cdots$

Donc G est la primitive de f sur $[a, b]$ qui …………………….

Ainsi pour tout $x \in [a, b]$, $G(x) = \cdots$

Donc $\int_a^b f(x)dx = \ldots\ldots = \ldots\ldots - \ldots\ldots$

Méthode : Pour calculer une intégrale on cherchera d'abord à déterminer une primitive et on appliquera la formule.

Exemple : $\int_0^3 xe^{x^2}dx =$…

Travail en autonomie : 7 p 173

III. Généralisation de la notion d'intégrale à une fonction continue de signe quelconque

1) Définition

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I, on définit pour tous a et b de I, l'intégrale de a à b de f par :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Remarques :

- Puisque deux primitives de f sur I ne diffèrent que par une constante, cette définition ne dépend pas de la primitive choisie.
- Si f est positive, cette définition coïncide avec la définition du I.

Exemples :

- Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est définie par $f(x) = 7\cos(2x - 3) - 5\sin(2x - 2)$.

$\int_0^{\pi/2} f(x)dx =$ ………………………………………….

- Sur $\mathbb{R}$, la fonction g est définie par $g(x) = \frac{3x}{x^2+1}$. $\int_0^1 g(x)dx =$……………………………………….

2) Propriétés de l'intégrale

Proposition : Soient f et g continues sur un intervalle I et a,b et c des réels de I. Alors :

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ (relation de Chasles généralisée)
- Pour tous réels λ *et* β , $\int_a^b [\lambda f(x) + \beta g(x)]dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$ (linéarité de l'intégrale)

Preuve :

Soient F et G des primitives respectivement de f et g sur I. Alors :

- $\int_a^b f(x)dx =$ .... et $\int_b^a f(x)dx =$ .... Donc $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
- $\int_a^c f(x)dx =$................................$\int_a^b f(x)dx =$................................$\int_b^c f(x)dx =$................................

Donc $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx =$..=................................=................................

- On a $(\lambda F + \beta G)' =$................................ Donc $\lambda F + \beta G$ est une .... de $\lambda f + \beta g$ sur I. Ainsi :

$\int_a^b [\lambda f(x) + \beta g(x)]dx$ = ... - ....

= λ ....+ β.............................

= λ ....+ β.............................

Exercice : Soient $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx$ et $J = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{2x}}dx$. Calculer $I + J$ et en déduire J.

Travail en autonomie : 8 p 173

Proposition : Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[a, b]$.

- Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.
- Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

IMPORTANT : Dans la proposition précédente a et b sont des réels tels que $\boldsymbol{a} \leq b$.

Preuve : Soient F et G des primitives respectivement de f et g sur I. Alors :

- Si f est positive sur I alors F' aussi puisque .... donc F est .... sur I. Ainsi du fait que $a \leq b$ et que F est .... sur I on a $F(a)$ ... $F(b)$ et donc : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \geq 0$.
- Si f est négative sur I alors F' aussi puisque .... donc F est .... sur I. Ainsi du fait que $a \leq b$ et que F est .... sur I on a $F(a)$ ... $F(b)$ et donc : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \leq 0$.
- Si pour tout $x \in [a, b] f(x) \leq g(x)$ alors $g - f$ est .... sur I donc d'après le premier point $\int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0$.

On en déduit par linéarité ....et donc.. .....

Exercice :

1) Montrer que pour tout t appartenant à $[0,1]$, on a $0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq t$.
2) En déduire un encadrement de $\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt$

Travail en autonomie : 9 p 173 et 99 p 182

IV. Deux applications du calcul intégral

1) Valeur moyenne d'une fonction

a) Activité 4 p 165

A traiter sur feuille annexe.

b) Définition

Définition : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$. La valeur moyenne de f est :

$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

Interprétation graphique :

On déduit de la définition précédente l'égalité suivante : $\mu(b-a) = \int_a^b f(x)dx$.

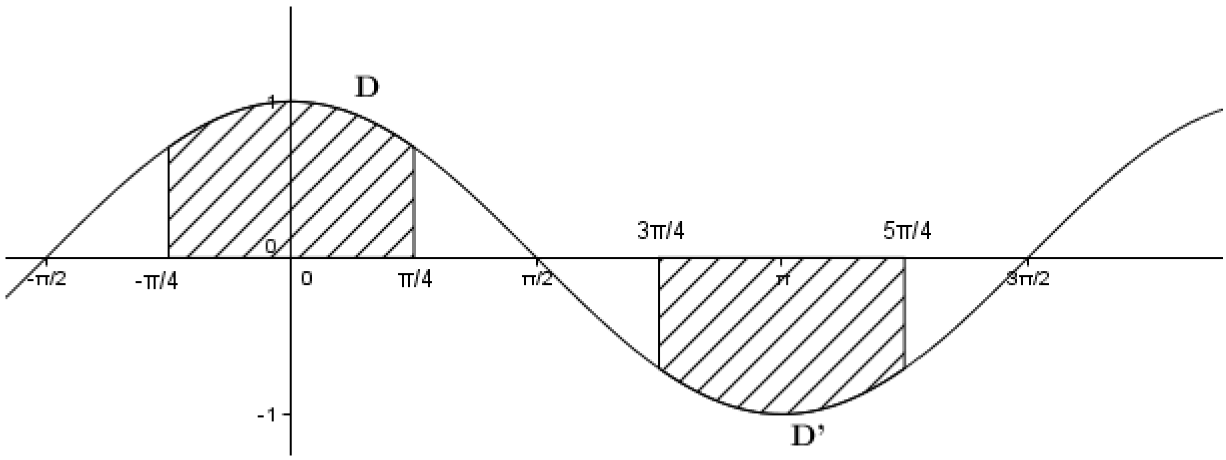
Considérons le rectangle de dimensions $b-a$ et μ ; dans le cas où f est positive l'aire de ce rectangle et l'aire sous la courbe de f sont égales.

Travail en autonomie : Ex 11 p 175

2) Calcul d'aires

a) Aire et fonction de signe quelconque

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = cosx$, représentée ci-dessous, ainsi que les domaines D et D' délimités respectivement par C_f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{\pi}{4}$ pour D, C_f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{3\pi}{4}$ et $x = \frac{5\pi}{4}$ pour D'.



Remarque : La définition du (1) contient une hypothèse : f positive sur $[a, b]$. Ainsi $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et la courbe de f que **lorsque $\boldsymbol{a \leq b}$ et $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$ pour tout $\boldsymbol{x \in [a, b]}$**.

Dans l'exemple ci-dessus seul le domaine D vérifie les hypothèses et on a donc : $aire(D) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ ua

Pour D' il suffit de changer f en $-f$, ce qui a revient à considérer le domaine symétrique par rapport à l'axe des abscisses, qui est de même aire. On a donc :

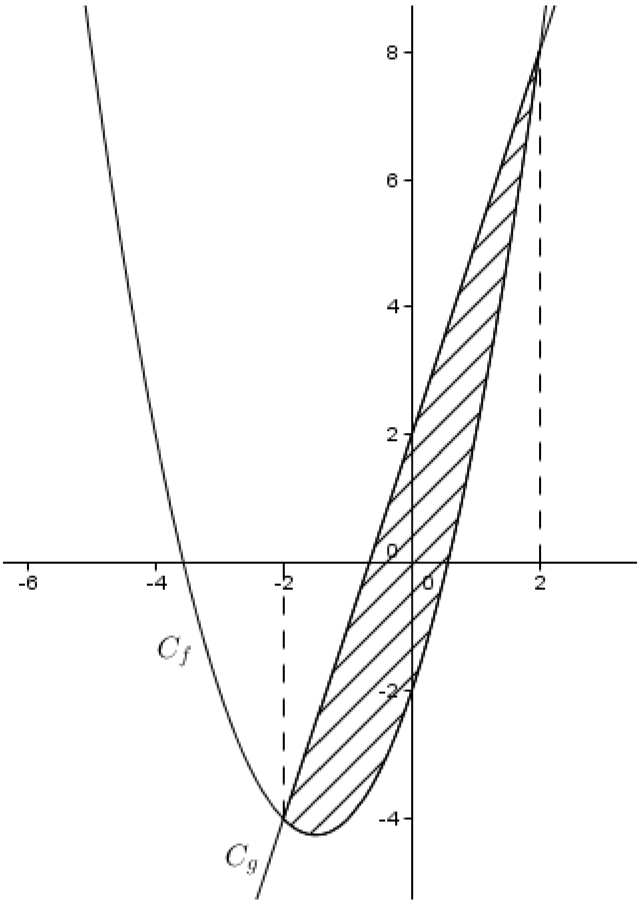
$$aire(D') = -\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} f(x)dx \text{ ua}$$

b) Aire entre deux courbes

Considérons les deux fonction f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 2$ et $g(x) = 3x + 2$.

On montre facilement que C_f et C_g se coupent aux points d'abscisses -2 et 2. Alors l'aire A du domaine hachuré est tout simplement :

$A = \int_{-2}^{2}(g(x) - f(x))dx =$………



De manière générale on a le résultat :

Proposition :

Soient f et g deux fonction définies et continues sur un intervalle I, et a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.

Supposons que l'on a en outre $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors l'aire du domaine délimité par les courbes de f et g et par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée par :

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx \text{ ua}$$

Travail en autonomie : Ex 10 p 175