Les Nombres Complexes

Introduction :

- **Historique** :

Au début du XVI[ème] siècle, le mathématicien Scipione dal Ferro, propose une formule donnant une solution de l'équation du 3[ème] degré $x^3 + px = q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

A la fin du XVI[ème] siècle, le mathématicien Bombelli applique cette formule à l'équation $x^3 - 15x = 4$. Il obtient littéralement :

$$x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

Cette écriture n'a, *a priori,* pas de sens puisqu'on ne sait pas ce que représente le symbole noté $\sqrt{-1}$. Mais Bombelli va plus loin. Il remarque, en utilisant les règles usuelles de calcul que :

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \text{ et } \left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 2 - 11\sqrt{-1} \text{ et donc}$$
$$\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1} \text{ et } \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}$$

Si bien qu'il obtient finalement : $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 2 + 2 = 4$

Or, $x = 4$ est bien une solution de l'équation $x^3 - 15x = 4$.

Il est quand même étrange à partir d'une écriture qui n'a, *a priori,* pas de sens, de trouver une solution de l'équation. Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessus ? C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes...

- **Nécessité de nouveaux nombres :** ***activité 1 du livre, page 198 .***

I. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

Définition : L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble qui

- contient *tous les nombres réels*,
- est muni des opérations *addition et multiplication*, pour lesquelles *les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$,*
- contient un nombre noté $\boldsymbol{i}$, tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$,
- est constitué de tous les nombres $\boldsymbol{z = a + ib}$, où a et b sont des réels.

Exemples $i + 1$; 3; $-5i$; $\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont des nombres complexes

II. La forme algébrique d'un nombre complexe

1°/ Partie réelle, partie imaginaire

Définition 1: **L'écriture sous la forme $\boldsymbol{z = a + ib}$, où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des réels, est unique et elle est appelée forme algébrique de $\boldsymbol{z}$.**

Exemples : $3 - 2i$; $-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$; $1{,}5i$ sont des formes algébriques de nombres complexes ;

Attention : $4 + i(2 + i)$ n'en est pas une.

Définition 2 :

Si $\boldsymbol{z}$ est un nombre complexe qui s'écrit $\boldsymbol{z = a + ib}$, où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des réels,
alors $\boldsymbol{a}$ est **la partie réelle** de z, **notée $\boldsymbol{Re(z)}$,** et $\boldsymbol{b}$ est **la partie imaginaire** de z, **notée $\boldsymbol{Im(z)}$**

Remarques : la partie réelle et la partie imaginaire de z sont des nombres réels

si $b = 0$, $\boldsymbol{z = a}$, z est un nombre **réel.** (Remarque : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$); ex : $3 = 3 + 0i$

si $a = 0$ $\boldsymbol{z = ib}$, z est un nombre **imaginaire pur** ; ex : $-5i$; $\frac{1}{3}i$

Soit $z = 3 - 2i$, $Re(z) =$ et $Im(z) =$

Propriété :

Deux nombres complexes sont **égaux** si, et seulement si, ils ont la **même partie réelle et** la **même partie imaginaire .**

Autrement dit , soit a, b, a', b' des réels, on a : $\boldsymbol{a + ib = a' + ib'}$ **si, et seulement si,** $\boldsymbol{a = a' \text{ et } b = b'}$

Remarques : $\boldsymbol{a + ib = 0}$ **si, et seulement si,** $\boldsymbol{a = 0 \text{ et } b = 0}$

$\boldsymbol{a + ib}$ **est réel si, et seulement si,** $\boldsymbol{Im(z)} =$

$\boldsymbol{a + ib}$ **est imaginaire pur si, et seulement si,** $\boldsymbol{Re(z)} =$

2°/ Calculs dans l'ensemble $\mathbb{C}$

- **Addition et multiplication :** tous les résultats démontrés dans $\mathbb{R}$, à partir des propriétés de ces opérations sont valables dans $\mathbb{C}$
  (à savoir : commutativité, associativité, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition)

  Soit $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$, avec a, b, a', b' réels

$\boldsymbol{z + z'} =$

zz' =

- ***Résultat important :*** $\boldsymbol{(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2}$ ***(ce nombre est un réel)***

Les identités remarquables vues dans $\mathbb{R}$ sont valables dans $\mathbb{C}$

Exercice 1 : soit $z = 3 + 2i$, $z' = -5 + 3i$. Calculer $z + z'$, zz' , z^2, z'^2 (écrire les résultats sous forme algébrique)

Exercice 2 : Soit $Z = (2 + 5i)(3 + i) + i(3 - 4i)$, écrire Z sous forme algébrique

- ***Inverse d'un nombre complexe non nul :***

  Soit $z = a + ib$, avec a, b réels et $(a, b) \neq (0,0)$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} =$

- ***Quotient de deux nombres complexes :***

  Soit $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$, avec a, b, a', b' réels, et $(a', b') \neq (0,0)$, $\frac{z}{z'} = \frac{a + ib}{a' + ib'} = (a + ib) \times \frac{1}{a' + ib'}$

Exercice 3 : soit $z = 1 + 5i$, $z' = -2 + 3i$, calculer $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z'}$ et $\frac{z}{z'}$.

Exercice 4 : Soit $Z = (2x + 4i) + i(ix + 3i) + 2ix$, où x est un nombre réel .

1°/ Ecrire Z sous forme algébrique

2°/ A quelle condition sur x le nombre Z est-il réel ? Que vaut alors Z ?

3°/ A quelle condition sur x le nombre Z est-il imaginaire pur ? Que vaut alors Z ?

Travail en autonomie : savoir-faire 1 et 2 page 201 ; exercice 60 page 213.

III. Conjugué d'un nombre complexe

1°/ Définition

Soit le nombre complexe $\boldsymbol{z = a + ib}$, où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des réels,
le nombre complexe $\boldsymbol{a - ib}$, noté $\boldsymbol{\bar{z}}$, est appelé nombre conjugué de $\boldsymbol{z}$.

Exemples : soit $z = 2 + 3i$, alors $\bar{z}$ = ; soit $z = -5 - i$, alors $\bar{z}$ =

soit $z = 1{,}2$ alors $\bar{z}$ = ; soit $z = -\frac{\sqrt{3}}{2}i$, alors $\bar{z}$ =

2°/ Conséquences de la définition

Le conjugué de $\boldsymbol{\bar{z}}$ est ; on dit que $\boldsymbol{z}$ **et $\boldsymbol{\bar{z}}$ sont des complexes conjugués.**

Si $z = a + ib$, où a et b sont des réels, alors $\boldsymbol{z\bar{z} = a^2 + b^2}$ (remarque : $\boldsymbol{z\bar{z}} \in$______)

Pour tout nombre complexe z, $\quad z+\bar{z}=2Re(z) \quad\quad z-\bar{z}=2i\,Im(z)$

Un nombre complexe z est réel si, et seulement si, $z=\bar{z}$
Un nombre complexe z est imaginaire pur si, et seulement si, $z=-\bar{z}$

Démonstrations : sur feuille annexe

3°/ Opérations sur les nombres conjugués

Pour tous nombres complexes z et z',

$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$ $\quad\quad \overline{zz'}=\bar{z}\times\bar{z}'$ $\quad\quad \overline{z^n}=(\bar{z})^n$ **, pour tout entier naturel**

Pour tous nombres complexes z et z' avec $z'\neq 0$ $\quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

Démonstrations : (un seul cas, sur feuille annexe)

Exercice 5 Compléter : $z=(1-i)(2-3i)$, $\bar{z}=$ $\quad\quad z=\frac{5+8i}{4-i}$, $\bar{z}=$

$Z=3z^2+1{,}5\,i$, où $z\in\mathbb{C}$, $\quad \bar{Z}=$

Exercice 6 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les deux équations proposées ; on commencera par écrire $z=x+iy$, avec x et y réels

1. $3\bar{z}=2+3i$
2. $z+2\bar{z}=6+i$

4°/ Equations du second degré à coefficients réels

Propriété : **Soit l'équation $az^2+bz+c=0$, d'inconnue z, où a, b et c sont des réels, avec $a\neq 0$.**
Soit Δ le discriminant de cette équation, Δ est le nombre réel égal à b^2-4ac.

- **Si $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes,** $z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ **et** $z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- **Si $\Delta=0$, l'équation admet une solution double réelle,** $z_0=\frac{-b}{2a}$
- **Si $\Delta<0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées,** $z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ **et** $z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Démonstration (sur feuille annexe)

Les cas $\Delta>0$ et $\Delta=0$ ont été démontrés en première, on ne démontrera que les résultats du cas $\Delta<0$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante $3z^2-5z+3=0$

$\Delta=(-5)^2-4\times 3\times 3=$

$\Delta<0$, l'équation admet donc deux solutions ________________________________ :

$z_1=$ $\quad\quad$ et $z_2=\overline{z_1}=$

L'ensemble des solutions est $S=$

Exercice 7 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $z^2+z+1=0$;
2. $2-z=\frac{2}{z}$

Exercice 8 : *(logique)* La condition $Re(z)=\frac{1}{2}$ est-elle une condition nécessaire et/ou suffisante pour que z soit solution de l'équation $z^2-z+3=0$?

Travail en autonomie : savoir-faire 4 p 203, exercice 83 p 214

IV. Affixe, module et arguments d'un nombre complexe

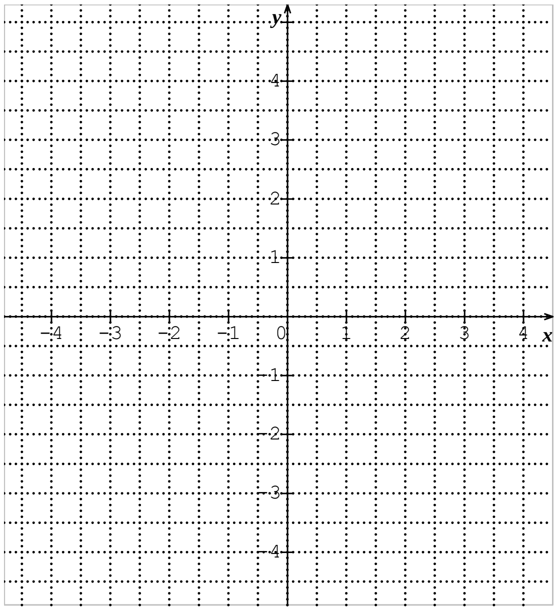
1°/ Représentation géométrique d'un nombre complexe

On munit le plan d'un **repère orthonormé direct** $(\boldsymbol{O}; \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})$. Le plan est alors appelé ***plan complexe*** (ou plan de Cauchy)

Définition : A chaque point M de coordonnées $(a\,;b)$ on associe l'unique nombre complexe $z = a + ib$,
z est appelé l'affixe du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$;
réciproquement, à tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe un point M , et un seul, de coordonnées $(a\,;b)$
on dit alors que ***M est l'image de z .***

Représentation :

Placer dans le plan les points A, B, C et E d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 2 - i$, $z_C = 3i$, et $z_E = -1 - i$



L'axe $(O, \vec{u})$ est l'axe ____________________

L'axe $(O, \vec{v})$ est l'axe ______________________________

Remarque :
Deux **points sont confondus** si, et seulement si, ils ont la même affixe
Deux **vecteurs sont égaux** si, et seulement si, ils ont la même affixe.

Propriétés :
En notant z_M l'affixe d'un point M et $z_{\vec{w}}$ celle d'un vecteur $\vec{w}$, on a :

(1) l'affixe du milieu I de $[AB]$ est $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

(2) l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

(3) l'affixe du vecteur $k\vec{w}$ est $z = k \times z_{\vec{w}}$ (k réel)

(4) l'affixe du vecteur $\vec{w} + \overrightarrow{w'}$ est $z = z_{\vec{w}} + z_{\overrightarrow{w'}}$

Démonstrations : à l'aide des coordonnées de points ou de vecteurs.

2°/ Module et arguments d'un nombre complexe

a. *Définitions :*

Soit $z = a + ib$, où a et b sont des réels, et M le point d'affixe z .

- Le **module de $\boldsymbol{z}$**, noté $|z|$, est **la distance OM**, c'est-à-dire le nombre réel $\sqrt{\boldsymbol{a^2 + b^2}}$
- **Si $\boldsymbol{z \neq 0}$**, un **argument de $\boldsymbol{z}$**, noté $arg(z)$, est une mesure, en radians, de l'angle orienté $(\vec{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{OM}})$

Exemples : $|2 - 5i| =$

$\left| \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \right| =$

$arg(i) =$

$arg(1 - i) =$

Remarques :

- $|z| = 0$ si, et seulement si, $z = 0$
- Si θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$, les autres mesures de cet angle sont $\theta + k2\pi, avec\ k \in \mathbb{Z}$.
  Un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments.
- Le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue.

b. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v}\ )$.

Propriété-Définition :

Soit z est un nombre complexe non nul, z peut s'écrire sous la forme $z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta\ )$, où $\theta \in \mathbb{R}$.
Cette écriture est la *forme trigonométrique de z .*

Propriété : **Si $z = r(\cos\theta + i \sin\theta\ )$, avec r, θ réels et $r > 0$, alors $r = |z|$ et $\theta = arg(z) \quad (2\pi)$**

De plus, si $z \neq 0$ et $z = a + ib$, avec a et b réels, alors $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$

Démonstrations : sur feuille annexe

Exemple : Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$, $|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$.

Soit θ un argument de z ; on a $\cos\theta =$ et $\sin\theta =$ donc $\theta =$

la forme trigonométrique de z est : $z =$

Exercice 9 : Soit $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, écrire la forme trigonométrique de ce complexe

Exercice 10 : Soit z le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{6}$, écrire z sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique

Exercice 11 : Soit $z = -2[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)]$, est-ce la forme trigonométrique de z ? Si non, trouver cette forme.

c. Propriétés des modules et des arguments

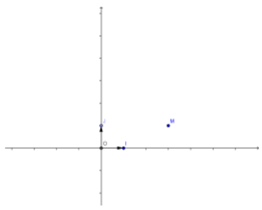
Propriété 1 ***Soit z un nombre complexe non nul.***

- ***z est un réel si, et seulement si, $arg(z) = 0$ ou $\pi \quad (2\pi)$***
- ***z est un imaginaire pur si, et seulement si, $arg(z) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.***

Propriété 2 ***Pour tout nombre complexe z***

- $|\bar{z}| = |z|$ ***et, si $z \neq 0$, $arg(\bar{z}) = -arg(z) \quad (2\pi)$***
- $|-z| = |z|$ ***et, si $z \neq 0$, $arg(-z) = arg(z) + \pi \quad (2\pi)$***

La propriété 1 résulte directement de la définition de arg (z) ;
La propriété 2 résulte de symétries par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$ et à O.



Propriété 3 ***Pour tout nombre complexe ,*** $|z|^2 = z\bar{z}$

Démonstration : sur feuille annexe

Propriété 4

calculs	*z et z' complexes quelconques*	*z et z' complexes non nuls*
produit	$\lvert zz' \rvert = \lvert z \rvert \times \lvert z' \rvert$	$arg(zz') = arg(z) + arg(z') \quad (2\pi)$
puissance	$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n$	$arg(z^n) = n\, arg(z) \quad (2\pi)$
inverse	$si\ z \neq 0 \quad \left\lvert \frac{1}{z} \right\rvert = \frac{1}{\lvert z \rvert}$	$arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z) \quad (2\pi)$
quotient	$si\ z' \neq 0 \quad \left\lvert \frac{z}{z'} \right\rvert = \frac{\lvert z \rvert}{\lvert z' \rvert}$	$arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z') \quad (2\pi)$

Module d'une <u>somme</u> : ***Pour tous nombres complexes z et z'***, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

Démonstrations : sur feuille annexe

V. La notation exponentielle d'un nombre complexe

1°/ Définitions

Soit la fonction f qui, à tout réel θ associe le nombre complexe $cos\theta + i\ sin\theta$;
ce nombre est de module 1 et d'argument $\theta \quad (2\pi)$.
La propriété du produit démontrée dans le IV (propriété 4) permet d'écrire que $f(\theta) \times f(\theta')$ a pour module 1 et pour argument $\theta + \theta' \quad (2\pi)$, ainsi f vérifie la relation fonctionnelle des exponentielles : $f(\theta) \times f(\theta') = f(\theta + \theta')$.
Si l'on étend la notion de dérivée à $\mathbb{C}$, $f'(\theta) = sin\theta + i\ cos\theta = if(\theta)$. Ainsi $f' = if \quad et\ f(0) = 1$.
Ces analogies conduisent à adopter la notation suivante :

Définition : ***Pour tout réel θ, on pose $e^{i\theta} = cos\theta + i\ sin\theta$*** (Notation due à Euler)

$e^{i\theta} = cos\theta + i\ sin\theta \qquad \begin{cases} |e^{i\theta}| = \\ arg(e^{i\theta}) = \end{cases}$

Exemples : $e^{i\pi} =$ $\qquad e^{i\frac{\pi}{2}} =$ $\qquad e^{-i\frac{\pi}{2}} =$ $\qquad e^{i0} =$

Propriété- Définition :

Soit z un nombre complexe non nul, de module r et d'argument θ, z s'écrit $z = re^{i\theta}$

Cette écriture est la forme exponentielle de z

Réciproquement, si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, alors $|z| = r$ et $arg(z) = \theta \quad (2\pi)$

2°/ Propriétés de calcul

Pour tous réels θ et θ', et tout entier naturel n

(1) $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; **(2)** $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$

(3) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; **(4)** $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (formule de Moivre)

Application : retrouver des formules de trigonométrie *(sur feuille annexe)*

Formules d'addition : $\cos(a+b) = cosa\ cosb - sina\ sinb$ et $\sin(a+b) = sina\ cosb + sinb\ cosa$,
à l'aide de $e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)}$, sous forme algébrique

Formules de duplication : $\cos(2a) = cos^2(a) - sin^2(a)$ et $\sin(2a) = 2sina\ cosa$
à l'aide de $(e^{ia})^2 = e^{i(2a)}$, sous forme algébrique.

Exercice 12 : 1. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes $z_1 = 2e^{\frac{5i\pi}{6}}$, $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2. Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -3 + i\sqrt{3}$
En déduire un argument de $z_1 z_2$

VI. *Nombres complexes et géométrie.*

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Propriété : **Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B, la distance AB égale à $|z_B - z_A|$**

et $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = arg(z_B - z_A)$ (2π).

Soit A, B et C trois points distincts d'affixes respectives z_A, z_B et z_C, alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ (2π).

Démonstration : sur feuille annexe

Application :

On donne les points A, B et M d'affixes respectives $2i$, $2 - i$ et z

1. Ecrire les *affixes* des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MB}$
2. Calculer la distance AB
3. Exprimer les distances AM et MB
4. Quel est l'ensemble E des points M du plan, tels que $|z - 2i| = 3$? (*Point-Méthode)*
5. Quel est l'ensemble F des points M du plan, tels que $|z - 2i| = |z - 2 + i|$? (*Point-Méthode)*

1. Affixe de $\overrightarrow{AB}$ =

   Affixe de $\overrightarrow{AM}$ =

   Affixe de $\overrightarrow{MB}$ =

2. $AB =$

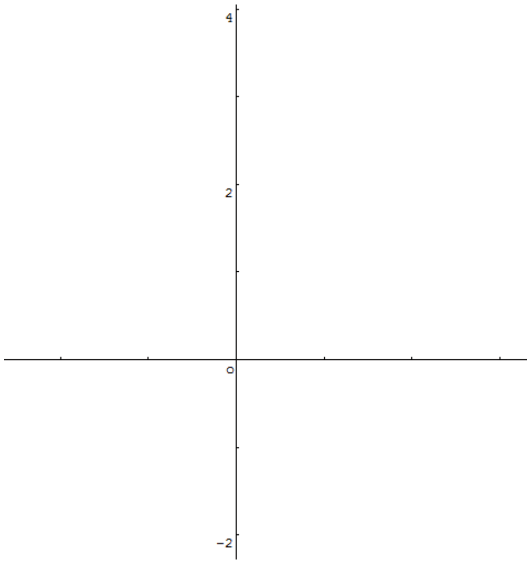
3. *Expressions* de AM et MB : $AM =$ $MB =$

4. $M \in E$ *si, et seulement si,* $|z - 2i| = 3$

   $M \in E$ *si, et seulement si,* $= 3$

5. $M \in F$ *si, et seulement si,* $|z - 2i| = |z - 2 + i|$

   $M \in F$ *si, et seulement si,* $=$



Exercice 13 :

1. Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $1 + i$, $1 - i$, et $(1 + \sqrt{3})i$,

   Déterminer **la mesure principale de l'angle** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
2. Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $-2 + i$, $4 - 2i$, et $1 + 7i$,

   démontrer que **le triangle ABC est isocèle rectangle en A .**

Quelques cas classiques :

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel (non nul et différent de 1) ssi

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur (non nul) ssi

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est égal à i ou $-i$ ssi

…