Probabilités conditionnelles et indépendance

Un peu d'histoire : voir l'article de d'Alembert : « croix ou pile », Encyclopédie, Tome 4 , pages 512,513. gallica.bnf.fr/Encyclopédie Tome 4,
Au XVIIIème siècle, *l'étude des jeux de hasard* donna naissance aux probabilités grâce à *Pascal, P. de Fermat et C. Huygens*

I. Activité préparatoire ***Activité 1, page 294 du livre***

II . Conditionnement par un événement

Définition : ***Pour une même expérience aléatoire, A et B sont deux événements, et*** $p(B) \neq 0$.

La probabilité conditionnelle de A par rapport à B est le nombre, noté $p(A/B)$ ***ou*** $p_B(A)$,

défini par $p_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$ ***(probabilité que*** A ***se réalise, sachant que*** B ***est réalisé)***

Propriété : Probabilité d'une intersection

A et B sont deux événements alors $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$ ***si*** $p(B) \neq 0$,

$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$ ***si*** $p(A) \neq 0$

Cela se déduit de la définition

On peut utiliser une représentation sous forme ***d'arbre pondéré***

Exercice 1 : Une société comprend 40% de cadres et 20% d'entre eux ont suivi une formation en management.
Le directeur des ressources humaines tire au hasard la fiche d'un des employés. On cherche la probabilité que ce soit la fiche d'un cadre qui a suivi la formation. On considèrera les événements : C : « la fiche est celle d'un cadre »
F : « la fiche est celle d'un employé qui a suivi la formation »

1. Traduire les pourcentages donnés en terme de probabilité.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Calculer la probabilité demandée.

Rappel des règles de fonctionnement d'un arbre pondéré :

Règle 1 : La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
Règle 2 : La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches composant ce chemin.
Règle 3 : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet événement.

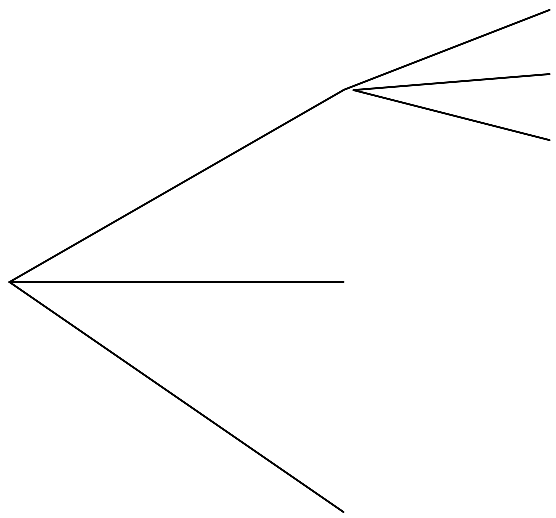
III. Arbres pondérés et formule des probabilités totales.

1°/ Un exemple

10 boules indiscernables au toucher sont placées dans une urne, (2 bleues, 5 noires, 3 rouges) ; on effectue deux tirages successifs sans remise (on tire une boule à chaque tirage). On note dans l'ordre le résultat obtenu.
On notera, par exemple, N_1 :obtenir une noire au premier tirage ; N_2 :obtenir une noire au deuxième tirage
(Idem pour les autres couleurs)

On cherche la probabilité de l'événement B_2 ***: « obtenir une boule bleue au deuxième tirage »***

Faisons un arbre pondéré :



B_2 est la réunion de <u>trois événements incompatibles</u>:

<u>2°/ Cas général</u>

Rappel sur la notion de <u>partition d'un ensemble</u>

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire, $B_1, B_2, \dots, B_n$ des parties de Ω.

Dire que les ensembles $B_1, B_2, \dots, B_n$ forment une partition de Ω signifie que :

pour $1 \leq i \leq n$, chaque B_i est non vide,

pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, et $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ (ensembles deux à deux disjoints)

$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$

Représentation :

<u>Théorème : Formule des probabilités totales</u>

Soit $B_1, B_2, \dots, B_n$ des événements formant une partition de l'univers Ω d'une expérience aléatoire, et A un événement,

La probabilité de A est $p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \dots + p(A \cap B_n)$.

Ou encore : $p(A) = p_{B_1}(A) \times p(B_1) + p_{B_2}(A) \times p(B_2) + \dots + p_{B_n}(A) \times p(B_n)$.

<u>Démonstration</u> : A est la réunion des n événements incompatibles $A \cap B_1$, $A \cap B_2, \dots,$ $A \cap B_n$,

donc $p(A) = p\,[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)] = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \dots + p(A \cap B_n)$.

D'autre part, pour $1 \leq i \leq n$, $p(B_i) \neq 0$ et $p_{B_i}(A) =$ d'où $p(A \cap B_i) =$

D'où la seconde formule.

<u>Exercice 2 :</u>

Un test de fiabilité.

Une machine fabrique des pièces, avec une probabilité de pièces défectueuses égale à 0,02. On teste les pièces, et, parmi les pièces défectueuses, la probabilité d'élimination après le test est de 0,97.

Hélas le test, qui n'est pas parfait, élimine aussi des pièces non défectueuses, avec une probabilité de 0,01.

Quelle est la probabilité qu'une pièce soit éliminée ?

Soit les événements : D : « La pièce est défectueuse » et T : «Le test élimine la pièce ».

1. Construire l'arbre pondéré correspondant
2. A l'aide de la formule des probabilités totales calculer la probabilité qu'une pièce soit éliminée par le test.

III. Evénements indépendants

Définition :

Dire que deux événements A et B sont indépendants signifie que $\boldsymbol{p(\,A \cap B\,) = p(A) \times p(B)}$

Remarques :

- Si $p(A) \neq 0$ alors $p_A(B) = p(B)$ *ou,* *si* $p(B) \neq 0$ *alors* $p_B(A) = p(A)$
- La réalisation ou non de l'événement A ne conditionne pas la réalisation de B .
- *Ne pas confondre événements* ***indépendants*** *et événements* ***incompatibles :***
  événements incompatibles A *et* B : *alors* $p(A \cap B\,) = 0$
  événements indépendants A *et* B : *alors* $p(A \cap B\,) = p(A) \times p(B)$
  avoir $p(A) \times p(B) = p(A \cap B\,) = 0$ *n'est pas possible si* $p(A) \neq 0$ *et* $p(B) \neq 0$,
  donc deux événements incompatibles A *et* B *tels que* $p(A) \neq 0$ *et* $p(B) \neq 0$ *ne sont jamais indépendants.*

Propriété : ***Indépendance et événements contraires***

Si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour $\overline{A}$ ***et B, pour A et*** $\overline{B}$***,***
et pour $\overline{A}$ ***et*** $\overline{B}$.

Démonstration sur feuille annexe

Exemple du livre (page 300) à consulter (avec l' utilisation d'un tableau à double entrée)

Exercice 3 : On fait l'hypothèse que chacun des moteurs d'un avion bimoteur tombe en panne avec une probabilité de 0,000 1 et ceci de façon indépendante de l'autre moteur.
Quelle est la probabilité que l'avion arrive à bon port sachant que l'avion peut voler avec un seul moteur ?

IV . Quelques exercices d'application

Travail en autonomie : exercices du livre 1, 2, 3 p 297 ; 4, 5 p 299 ; 6, 7 p 301. ; 43 p 306 et 56 p 308.

Exercice 4 :

On jette simultanément deux dés non truqués et on considère les événements suivants :
A : « le total des nombres obtenus est 7 »
B : « on a obtenu au moins une fois le chiffre 3 «
1. Les événements A et B sont-ils incompatibles ?
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 5 :

Dans une population on étudie deux caractères génétiques, notés A et B. 55% des individus possèdent le caractère A, 42% possèdent le caractère B, et 27% des individus ne possèdent ni le caractère A, ni le caractère B. On choisit au hasard un individu dans la population.

1. Calculer la probabilité qu'il possède le caractère A sachant qu'il possède le caractère B.
2. Calculer la probabilité qu'il possède le caractère B sachant qu'il possède le caractère A

Exercice 6 :

Le vaccin contre une certaine maladie contagieuse n'est pas toujours efficace.
Une étude permet les constatations suivantes :
la moitié de la population française est vaccinée, lorsqu'une personne est vaccinée, elle contracte la maladie dans un cas sur 5 et la probabilité pour un individu de la population d'attraper cette maladie est égale à 0,6.
On choisit au hasard un individu atteint de la maladie.
Quelle est la probabilité qu'il ait été vacciné ?