Suites numériques

Remise en route *(à traiter sur feuille annexe)*

Exercice 1 : Déterminer le troisième terme des suites suivantes :

a. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$ b. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$; $n \in \mathbb{N}^*$ c. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n} \end{cases}$

Exercice 2 : Avec un tableur. Donner dans les deux cas , l'expression de la suite et son troisième terme.

	A	B	C
1	n	0	1
2	u_n	5	=3*B2 + 5

	A	B	C
1	n	0	1
2	u_n	-7	=4*C1-7

I. Suites arithmétiques . Suites géométriques

Suites arithmétiques

- Dire que la suite (u_n) est ***arithmétique*** signifie qu'il existe un **réel r** tel que, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = u_n + r$$
- Si une telle suite est définie par son premier terme u_0 et sa raison r, alors, pour tout entier naturel n,
$$u_n = u_0 + n\,r$$
Pour p entier naturel vérifiant $p \leq n$, $\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p)\,r}$
- **Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :**
$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_p$ (… termes) $S = p \times \frac{u_1 + u_p}{2}$

Complément : notation

- ***A bien connaître :*** $\boldsymbol{1 + 2 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}}$

Suites géométriques

- Dire que la suite (u_n) est ***géométrique*** signifie qu'il existe un **réel q** tel que, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = q u_n$$
- Si une telle suite est définie par son premier terme u_0 et sa raison q, alors, pour tout entier naturel n,
$$u_n = u_0 q^n$$
Pour p entier naturel vérifiant $p \leq n$, $\boldsymbol{u_n = u_p q^{n-p}}$
- **Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :**
$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_p$ (… termes)

Si $q \neq 1$, $S = u_1 \times \frac{1-q^p}{1-q}$

Si $q = 1$, $S = p u_1$

Complément : notation

- ***A bien connaître :*** ***pour $q \neq 1$,*** $\boldsymbol{1 + q + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

Exercices d'application

Exercice 1 : Parmi les suites proposées, quelles sont les suites arithmétiques, géométriques?

a. $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ b. $u_n = 2^n + 3$ c. $\begin{cases} u_0 = -6 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

Exercice 2 :

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{7}u_n \end{cases}$; *prouver que cette suite est géométrique et calculer* $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{10}$

II. Le raisonnement par récurrence

Problème d'introduction, (voir livre page 10)

Une rangée de n pins a été abattue par la tempête et s'est écroulée comme une rangée de dominos. Le premier pin mesure 10 m et il est toujours exploitable dans sa totalité malgré sa chute. Pour les pins suivants, compte tenu des dégâts provoqués par la chute de l'arbre précédent, on remarque que la longueur de la partie exploitable de chaque pin est toujours égale à 1 m augmenté de la moitié de la longueur de la partie exploitable du pin précédent.

1. *a. Soit n un entier naturel. On désigne par v_n la longueur en mètres de la partie exploitable du pin numéro n ; calculer v_1, v_2 et v_3.*
   b. Montrer, sans calculer v_4 , que l'on a $v_4 > 2$, puis montrer que $v_6 > 2$.
2. *a. Soit p un entier naturel quelconque. Montrer que si la partie exploitable du pin numéro p est supérieure à 2 mètres, alors celle du pin numéro $(p+1)$ est aussi supérieure à 2 mètres.*
   b. Peut-on conjecturer que l'inégalité $v_{101} > 2$ est vraie ?
3. *Aurait-on la même conclusion si on avait eu $v_0 \leq 2$?*

Comment démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$?

***Mise en oeuvre*: deux étapes et une conclusion**

***1ère étape** : initialisation*

On vérifie que la proposition est vraie pour $n = n_0$

***2ème étape** : hérédité*

*On suppose que la propriété P_n est vraie pour **un** entier quelconque $n \geq n_0$, et, **sous cette hypothèse**, on démontre que P_{n+1} est vraie.*

***Conclusion :** Lorsque ces deux étapes sont franchies, on conclut que P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$*

Application :

Exercice 1 La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ pour\ tout\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1} \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n} > 0$.

Exercice 2 *Démontrer par récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 1$:* $\mathbf{1 + 2 + \ldots + n} = \frac{\boldsymbol{n(n+1)}}{\mathbf{2}}$

Exercice 3 *Soit α un réel strictement positif.*

Démontrer par récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'inégalité $(\mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{n}} \geq \mathbf{1} + \boldsymbol{n\alpha}$ (inégalité de Bernoulli)

III. Comportement global d'une suite – rappels voir livre, page 385

a. Définitions

- *Dire qu'une suite (u_n) est **croissante** signifie que : pour tout entier entier n,* $\boldsymbol{u_n \leq u_{n+1}}$
- *Dire qu'une suite (u_n) est **décroissante** signifie que : pour tout entier n,* $\boldsymbol{u_n \geq u_{n+1}}$
- *Dire qu'une suite (u_n) est **monotone** signifie qu'elle est soit croissante, soit décroissante*

Remarque : On peut définir une suite strictement croissante (respectivement strictement décroissante) et croissante à partir d'un certain rang. (respectivement décroissante à partir d'un certain rang) .

b. Méthodes d'étude de la monotonie d'une suite

- **Etude du signe de $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$**
- **Si tous les termes sont *strictement positifs*, comparaison de $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n}}$ à 1**
- **Si la suite est définie à l'aide d'une fonction, ($\boldsymbol{u_n = f(n)}$), étude des variations de $\boldsymbol{f}$**
  Si f est croissante sur un intervalle (bien choisi) inclus dans $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est croissante,
  si f est décroissante, alors (u_n) est décroissante.
  <u>Attention</u>, réciproque fausse . La monotonie de f est une condition suffisante mais pas nécessaire (cf ex 3).
- **Raisonnement par récurrence**

c. *Exemples d'application (à traiter sur feuille annexe)*

Exercice 1 : Etude de la monotonie de ces trois suites

a. $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$ *b.* $\begin{cases} u_0 = -10 \\ u_{n+1} = -\frac{u_n}{5} \end{cases}$ *c .* $u_n = \frac{2^n}{n+1}$; $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2 : La suite (u_n) est définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

a. donner les quatre premiers termes

b. exprimer $u_{n+1} - u_n$, en déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Exercice 3 : La suite (u_n) est définie par $u_n = n\cos(2\pi n)$

a. Montrer que cette suite est croissante

b. Observer la courbe de la fonction f, définie sur $[0\,;+\infty[$, par $f(x) = x\cos(2\pi x)$ (écran de la calculatrice)

c. Conclure.

IV. *Limite d'une suite (u_n)*

Problème d'introduction *(activité 5 page 11)*

Evolution du nombre d'adhérents d'un club de sport.

Lors de sa création au 1er janvier 2010, un club de sport a 300 adhérents. A la fin de sa première année, les trois quarts des adhérents se réinscrivent et 120 nouveaux membres adhèrent.

Pour tout entier naturel n on appelle a_n le nombre d'adhérents du club, n années après la création du club.

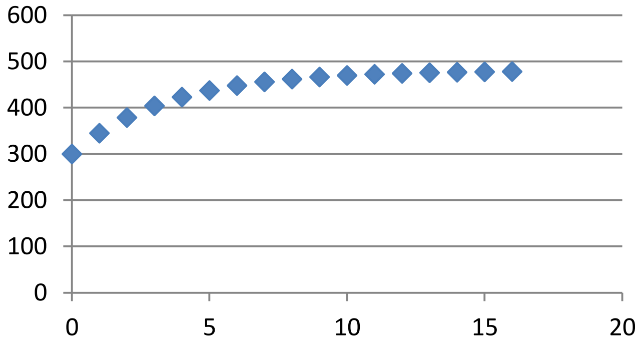
On suppose que le nombre d'adhérents évolue de la même façon les années suivantes.

1. Justifier que $a_{n+1} = 0{,}75a_n + 120$.

2. Montrer, par récurrence, que la suite (a_n) est majorée par 480.

3. Montrer que la suite (a_n) est croissante.

4. La représentation ci-contre est celle de la suite (a_n), que peut-on conjecturer sur la convergence de cette suite ?



Observation, à partir d'un tableur, du comportement de suites, pour n grand *(voir aussi activité 2 du livre, page 10)*

Ce tableau donne quelques termes de suites pour n de plus en plus grand.

Conjectures sur le comportement de ces suites.

n	1	10	10^2	10^3	10^6	10^8	10^{10}
n^2	1	100	10 000	10^6	10^{12}	10^{16}	10^{20}
$\sqrt{n}$	1	$\sqrt{10}$	10	$10\sqrt{10}$	10^3	10^4	10^5
$1/n$	1	0,1	0,01	0,001	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}

Soit $u_n = n^2$,

déterminer un indice n_0 tel que $u_n > 10^{12}$ pour tout $n \geq n_0$.

Soit $v_n = \sqrt{n}$,

déterminer un indice n_1 tel que $v_n > 10\,000$ pour tout $\geq n_1$.

Soit $w_n = 1/n$, déterminer un indice n_2 tel que $w_n < 10^{-4}$ pour tout $n \geq n_2$.

Soit A un nombre positif donné, aussi grand que l'on veut. Démontrer que $u_n > A$, à partir d'un certain rang.

On en déduit que l'intervalle $]A;\ +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Soit A un nombre positif donné, aussi petit que l'on veut. Démontrer que $-A < w_n < A$, à partir d'un certain rang.

On en déduit que l'intervalle $]-A\,;\ A\,[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit la suite (w_n) converge vers 0.

1°/ (u_n) tend vers l'infini

- ***Définition***

Dire que la suite (u_n) tend vers + ∞ signifie que, pour tout nombre A, l'intervalle [A ; +∞[contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \quad ou \quad \lim u_n = +\infty$$

Enoncé analogue pour dire que la suite tend vers - ∞ : pour tout nombre B, ….

- ***Interprétation graphique*** *(feuille annexe)*

Pour tout nombre A, il est possible de trouver un rang N, tel que $u_n \geq A$, pour tout $n \geq N$.

Pour $n \geq N$, la représentation graphique des termes de la suite se situe au-dessus de la droite d'équation $y = A$.

- ***Suites de référence***

(u_n) *définie par* $u_n = n^2$ *vérifie* $\lim_{n \to +\infty} u_n =$

(v_n) *définie par* $v_n = -n^3$ *vérifie* $\lim_{n \to +\infty} v_n =$

Pour tout réel q > 1, $\lim_{n \to +\infty} q^n$ **=** *(démonstration sur feuille annexe)*

2°/ Suites croissantes non majorées , suites décroissantes non minorées

- ***Suites majorées, minorées, bornées***

a. Définitions

- *Dire qu'une suite* (u_n) *est* ***majorée*** *signifie qu'il existe un réel* M *tel que,* ***pour tout entier*** $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{u_n \leq M}$
- *Dire qu'une suite* (u_n) *est* ***minorée*** *signifie qu'il existe un réel* m *tel que****, pour tout entier*** $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{u_n \geq m}$
- *Dire qu'une suite* (u_n) *est* ***bornée*** *signifie qu'elle est majorée et minorée.*

b. Exercices

Exercice 1 : La suite (u_n) est définie pour $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = 3 + \frac{1}{n}$. *Montrer que cette suite est bornée.*

Exercice 2 : La suite (u_n) est définie pour $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$. *Montrer que cette suite est bornée.*

- ***Propriété :***

1. ***Si une suite*** (u_n) ***est croissante et non majorée, alors elle tend vers +∞***
2. ***Si une suite*** (u_n) ***est décroissante et non minorée, alors elle tend vers -∞***

Démonstrations : ***(feuille annexe)***

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n + (-1)^n$, étudier le comportement de cette suite, en appliquant la propriété ci-dessus.

- ***Algorithme***

Détermination d'un seuil à partir duquel $\boldsymbol{u_n \geq A}$ ***, dans le cas d'une suite croissante non majorée.***

Soit la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 0{,}5n^2 + 1$,

On démontre aisément que (u_n) est croissante et $lim\, u_n = +\infty$

Compléter l' algorithme afin de faire afficher le premier indice n *(ou seuil) à partir duquel* $u_n \geq A$.

Saisir A

u *prend la valeur 1*

n *prend la valeur 0*

Tant que $u < A$

…

…

Fin Tant que

Afficher n

3°/ (u_n) a une limite finie

a. ***Définition :*** **l désigne un nombre réel. Dire que (u_n) a pour limite l, signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.**

On dit que la suite **converge vers l**, (u_n) est **convergente.**

On note : $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \quad ou \quad \lim u_n = l$

- ***Remarques* :** **1.** lorsque la suite converge vers l, **la limite l est unique**

  2. Si une suite **n'est pas convergente**, alors elle est **divergente** .

- ***Illustration graphique*** *(voir feuille annexe)*
- ***Exemples :***

1. Les suites définies par $u_n = \frac{1}{n}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{(-1)^n}{n}$ vérifient $lim\, u_n =$

Explications pour $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$:

2. Pour tout réel *q* tel que -1 < *q* < 1, $\lim_{n\to+\infty} q^n$ =

3. Quelques exemples de suites *divergentes* : $u_n = (-1)^n$, $v_n = 2^n$, $w_n = \cos n$

(u_n)

(v_n)

(w_n)

b. ***Propriété de convergence monotone*** *(propriété admise)*

- ***Propriété :***

  1. Toute suite croissante et majorée par un réel A converge.

  2. Toute suite décroissante et minorée par un réel B converge.

***Remarque* :** dans le premier cas, la suite converge vers une limite λ inférieure ou égale à A

et dans le second cas, la suite converge vers une limite μ supérieure ou égale à B

- ***Exemple*** Soit (u_n) définie par $u_n = 0{,}111 \ldots 11$ (terme écrit avec *n* décimales égales à 1)

  Monotonie :

  Majoration :

  Conclusion :

V. Théorèmes généraux sur les limites

1°/ Opérations

A partir de deux suites (u_n) et (v_n) , sans revenir à la définition, on peut déterminer le limite de $u_n + v_n$, $u_n \times v_n$ et $\frac{u_n}{v_n}$

Les tableaux suivants résument quelques résultats intuitifs, dans les cas de **sommes, produits** et **quotients .**

Dans certains cas, la forme est dite *indéterminée* ; on peut être amené à modifier la forme de l'expression pour conclure .

Cas de la somme

$\lim\ u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\ v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\ (u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	***F.I.***

l et l' sont des nombres réels.

*F.I. signifie : **forme indéterminée***

Cas du produit

$\lim\ u_n$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$		0
$\lim\ v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$		$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\ (u_n \times v_n)$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$		***F.I.***

Cas du quotient

$\lim\ u_n$	l	l	$l \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\ v_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\ (u_n / v_n)$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$F.I.$	***F.I.***

Exemples :

1. *Déterminer les limites des suites définies par :*

a. $u_n = n^2 + 2n + 5,$ ***b.*** $v_n = (n^2 + 2n + 5)\left(\frac{1}{n} - 2\right)$ ***avec*** $n \geq 1$

a. $\lim_{n\to+\infty} n^2 =$ ____

$\lim_{n\to+\infty} 2n =$ ____ *et* $\lim_{n\to+\infty}(2n + 5) =$ ____ *donc, d'après la règle de limite de somme,* $\lim_{n\to+\infty} u_n =$ ____

b. $\lim_{n\to+\infty}(n^2 + 2n + 5) = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} =$ ____ *et* $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} - 2\right) =$ ____ *donc, d'après la règle de limite de produit,* $\lim_{n\to+\infty} v_n =$ ____

2. ***Lever une indétermination*** ***(voir aussi exemples du livre pages 16 et 17)***

$u_n = n^2 - 2n + 5,$

$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} -2n = -\infty$ *et* $\lim_{n\to+\infty}(-2n + 5) = -\infty$ donc, on est en présence de *la forme indéterminée « $\infty - \infty$ »*

Factorisons l'expression $n^2 - 2n + 5$ par n^2 : $n^2 - 2n + 5 = n^2\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}\right)$ *pour* $n \neq 0$

$\lim_{n\to+\infty} -\frac{2}{n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = 1$

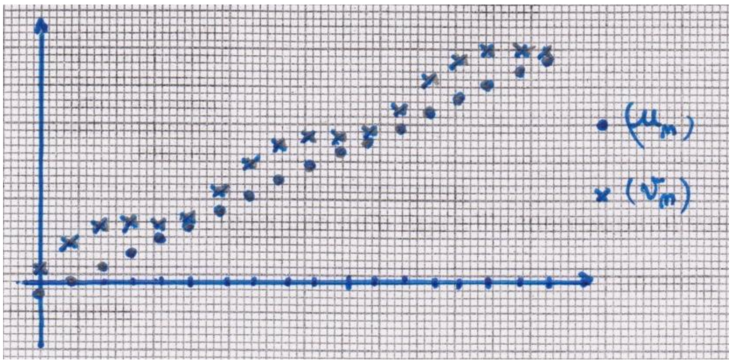
et, de plus, $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

donc, d'après la règle de limite de produit, $\lim_{n\to+\infty} u_n =$ ____

2°/ Limites et comparaison

- Si (u_n) *et* (v_n) sont deux suites vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$
- Si (u_n) *et* (v_n) sont deux suites vérifiant $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim u_n = -\infty$, alors $\lim v_n = -\infty$

Illustration graphique :



Démonstration *(feuille annexe)*

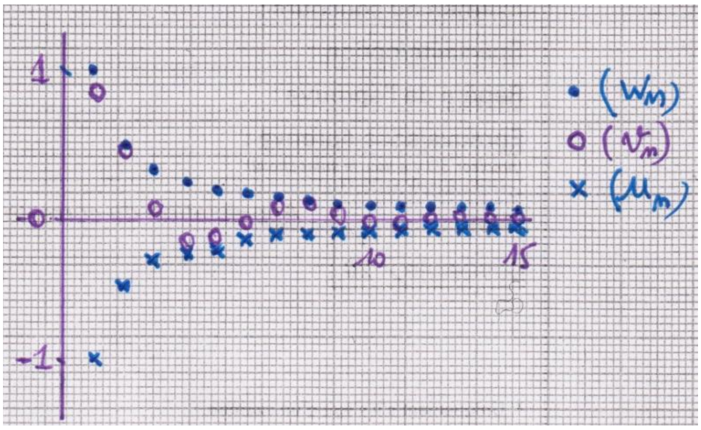
- ***Théorème des gendarmes pour les suites*** *(théorème admis)*

Activité 4 page 11 du livre

(u_n), (v_n) *et* (w_n) sont trois suites définies par $u_n = -\frac{1}{n}$,

$v_n = \frac{\cos n}{n}$ *et* $w_n = \frac{1}{n}$, *pour* $n \geq 1$.

On prouve : $u_n \leq v_n \leq w_n$



De plus,

$\lim_{n\to+\infty} u_n =$ ____ , $\lim_{n\to+\infty} w_n =$ ____

Les trois suites sont représentées ci-dessus. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de (v_n) *?*

Théorème :

Soit (u_n), (v_n) *et* (w_n) trois suites.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$, *et si* (u_n) *et* (w_n) sont deux suites convergentes de même limite l , alors la suite (v_n) est convergente et sa limite est l.

Exercice:

En utilisant le théorème des gendarmes, établir la convergence de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

Travail en autonomie : tous les exercices résolus des pages 13, 15, 17, 19 et 21

Exercices de votre livre : 56 p 25, 76 p 26, 93 p 28

A faire en TD : Problème : évolution d'une suite de probabilités ***(hyperbole page 43)***

.