Exercice 1 : 1) P(A)=$\frac{400}{2000} = 20\%$ donc, la réponse est **fausse**

2) D'après la formule des probabilités totales :

$P(D) = P(A\cap D) + P(B\cap D) + P(C\cap D) = 0{,}2 \times 0{,}05 + 0{,}5 \times 0{,}04 + 0{,}3 \times 0{,}03 = 0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}009 = 0{,}039$ donc, la réponse est **fausse**

3) $P_D(C)= \frac{P(C\cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}009}{0{,}039} = \frac{3}{13}$ donc, la réponse est **vraie.**

Exercice 3 : $f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}$ sur $\mathbb{R}-\{-2\}$

1) f est dérivable sur $[0; +\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$ et

$f'(x) = -\left(-\frac{4}{(x+2)^2}\right) = \frac{4}{(x+2)^2}$; sur $[0; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f **est strictement croissante sur** $[0; +\infty[$

2) $\forall x \in [0; +\infty[$,

$$f(x) = x \Leftrightarrow 5 - \frac{4}{x+2} = x \Leftrightarrow 5(x+2) - 4 = x(x+2) \Leftrightarrow 5x + 10 - 4 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3x + 6 = 0$$

$\Delta = 9 + 6 \times 4 = 33$, sur $[0; +\infty[$, l'équation n'admet qu'une solution : $\alpha = \frac{-3-\sqrt{33}}{-2} = \frac{3+\sqrt{33}}{2}$

(Remarque : $\frac{3-\sqrt{33}}{2} < 0$) donc, sur $[0; +\infty[$, **la seule solution est** $\boldsymbol{\alpha = \frac{3+\sqrt{33}}{2} \simeq 4{,}37}$

3) (U_n) semble être croissante et convergente vers 4,4 environ

4) **a)** Soit $P(n)$: "$0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq \alpha$" pour $n \in \mathbb{N}$

$U_0 = 1$ et $U_1 = f(1) = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$ donc $0 \leq U_0 \leq U_1 \leq \alpha$ donc $P(0)$ est vraie

Supposons que pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie et montrons alors que $P(n+1)$ est vraie :

On a : $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq \alpha$

$\Rightarrow f(0) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(\alpha)$ car f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

$\Rightarrow 0 \leq 3 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq \alpha$ car $f(0) = 3$ *et* $f(\alpha) = \alpha$ donc $P(n+1)$ est vraie.

La proposition est vraie au rang 0, elle est héréditaire donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la proposition est vraie c'est-à-dire **la suite (U_n) est croissante et majorée par α.**

b) La suite (U_n) **est croissante et majorée par α donc elle converge vers un réel inférieur ou égal à α.**

5) **a)** $S_0 = U_0 = 1$; $S_1 = U_0 + U_1 = 1 + \frac{11}{3} = \frac{14}{3} \simeq 4{,}67$, de plus $U_2 = f\left(\frac{11}{3}\right) = 5 - \frac{4}{\frac{11}{3}+2} = 5 - \frac{12}{17} = \frac{73}{17} \simeq 4{,}29$

Donc $S_2 = U_0 + U_1 + U_2 = S_1 + U_2 = \frac{14}{3} + \frac{73}{17} \simeq 8{,}96$

b) algorithme

c) (U_n) est une suite croissante minorée par $U_0 = 1$, donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{U_n \geq 1}$

$S_n = U_0 + U_1 + \cdots .. + U_n \geq \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$

Or $\lim_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$ donc, **par comparaison (S_n) diverge vers** $+\infty$

Exercice 4 : $\boldsymbol{g(x) = sin^2(x) + \cos(x)}$ **sur** $\mathbb{R}$

1) $\forall x \in \mathbb{R}, x + 2\pi \in \mathbb{R}$, et $g(x + 2\pi) = (\sin(x + 2\pi))^2 + \cos(x + 2\pi) = (\sin(x))^2 + \cos(x)$

donc **g est 2π −périodique**

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$, et $g(-x) = (\sin(-x))^2 + \cos(-x) = (-\sin(x))^2 + \cos(x) = sin^2(x) + \cos(x) = g(x)$

donc **g est paire**

2) g est 2π −périodique donc on peut l'étudier sur $[-\boldsymbol{\pi}; \boldsymbol{\pi}]$, on reproduira la portion de courbe obtenue sur des intervalles de longueur 2π, par translations de vecteurs $k2\pi\vec{\imath}$, $k \in \mathbb{Z}$.

g est paire donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, il suffit donc d'étudier sur $[\boldsymbol{0} ; \boldsymbol{\pi}]$ et de reproduire par symétrie la portion de courbe obtenue sur $[0 ; \pi]$.

3) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produit de fonctions sinus et cosinus,

$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}}$, $\boldsymbol{g'(x) = 2\cos(x) \times \sin(x) - \sin(x) = \sin(x)\,(2\cos(x) - 1)}$

4) **Etude sur $[0\,;\pi]$.**

$\forall \boldsymbol{x} \in [0\,;\pi]$, $\quad sinx \geq 0$

Donc, $g'(x)$ est du signe de $2\cos(x) - 1$

$2\cos(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow 2\cos(x) > 1 \Leftrightarrow \cos(x) > \frac{1}{2}$

Et, d'après le cercle trigonométrique :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$Sin\,x$	0	$+$		$+$	0
$2cosx - 1$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

$g(0) = 1$; $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$ et $\quad g(\pi) = -1$

D'où le tableau de variations de g :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		↗	$\frac{5}{4}$	↘	
	1				-1

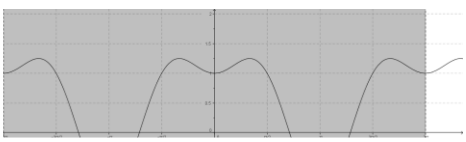
5) Sur $[0;\frac{\pi}{3}]$, $\boldsymbol{0} \notin \left[\boldsymbol{g(0)}; \boldsymbol{g}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$, **donc l'équation $\boldsymbol{g(x) = 0}$ n'admet pas de solutions sur $\left[\boldsymbol{0}; \frac{\pi}{3}\right]$.**

Sur $]\frac{\pi}{3};\ \pi]$, g est dérivable donc **continue**, g **strictement décroissante** et $\boldsymbol{0} \in [\boldsymbol{g(\pi)}; \boldsymbol{g}\left(\frac{\pi}{3}\right)[$,
donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]\frac{\pi}{3};\ \pi]$.

Donc, sur $[\boldsymbol{0};\ \boldsymbol{\pi}]$, $\boldsymbol{g(x) = 0}$ admet une unique solution.

D'après la calculatrice $g(2{,}237) \sim 0{,}000\,06$ et $g(2{,}238) \sim -0{,}0017$ donc $\quad 2{,}237 \leq \alpha \leq 2{,}238$

6. Représentation graphique :



Dans $(O;\vec{u},\vec{v})$, A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2-i$; $z_B = 2i$ et $z_C = 3$. A un point M du plan d'affixe z on associe un point M' d'affixe Z.

1. $ACEB$ parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$ $z_E - z_C = z_{\overrightarrow{AB}}$ $\Leftrightarrow$ $z_E = 3+2i-2+i$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{z_E = 1+3i}$ **.**

2. Pour tout nombre complexe z, on donne $Z = iz+1+i$.

a. $z_{A'} = i(2-i)+1+i = 2i+1+1+i = \mathbf{2+3i}$; $z_{B'} = i\times 2i+1+i = -2+1+i = \mathbf{-1+i}$

$z_{C'} = i\times 3+1+i = \mathbf{1+4i}$; $z_{E'} = i\times(1+3i)+1+i = i-3+1+i = \mathbf{-2+2i}$

b. nature du quadrilatère $A'C'E'B'$: $\overrightarrow{A'B'} = -1+i-2-3i = \mathbf{-3-2i}$; $\overrightarrow{C'E'} = -2+2i-1-4i = \mathbf{-3-2i}$

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'E'}$ **ceci équivaut à $A'C'E'B'$ est un parallélogramme**.

c. $\boldsymbol{z = iz+1+i}$ $\Leftrightarrow z(1-i) = 1+i \Leftrightarrow z = \frac{1+i}{1-i} \Leftrightarrow z = \frac{(1+i)^2}{2}$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{z = i}$ **. L'image de la solution est un point invariant.**

3. Pour tout nombre complexe z, on donne $Z = \bar{z} - 2i$.

a. $z_{A'} = \overline{2-i} - 2i = 2+i-2i = 2-i$; $Remarque :$ $z_{A'} = z_A$: ***A* est un point invariant**.

b. Un point M est invariant si, et seulement si, $Z = z$; résolvons alors $z = \bar{z} - 2i$. On pose $z = x+iy$, avec x, y réels.

$z = \bar{z} - 2i \Leftrightarrow x+iy = x-iy-2i \Leftrightarrow 2iy = -2i \Leftrightarrow \boldsymbol{y = -1.}$

L'ensemble des points invariants est la droite d'équation $y = -1$. $Remarque$: le point A est bien un point de cette droite.

4. Pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on donne $Z = \frac{z-2}{z-1}$.

a. **M, d'affixe z, est invariant** si, et seulement si, $\boldsymbol{z = \frac{z-2}{z-1}}$. Or, $z = \frac{z-2}{z-1} \Leftrightarrow z(z-1) = z-2 \Leftrightarrow \boldsymbol{z^2 - 2z + 2 = 0}$

le discriminant Δ vaut -4, cette équation a donc **deux solutions** complexes conjuguées **: $1-i$ et $1+i$** ,

ce sont les affixes des deux seuls points invariants dans ce cas.

b. Soit $z = x+iy$, avec x, y réels et $(x,y) \neq (1,0)$, $\boldsymbol{Z = \frac{x+iy-2}{x+iy-1}} = \frac{x-2+iy}{x-1+iy} = \frac{(x-2+iy)(x-1-iy)}{(x-1+iy)(x-1-iy)} = \ldots = \frac{x^2+y^2-3x+2+iy}{(x-1)^2+y^2}$

$$Z = \frac{x^2+y^2-3x+2}{(x-1)^2+y^2} + i\frac{y}{(x-1)^2+y^2} \quad \text{Ainsi,} \quad \boldsymbol{X = \frac{x^2+y^2-3x+2}{(x-1)^2+y^2}} \quad \textbf{et} \quad \boldsymbol{Y = \frac{y}{(x-1)^2+y^2}}$$

c. Soit **Γ l'ensemble des points M** d'affixe z, avec $z \neq 1$, tel que Z soit imaginaire pur.

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-3x+2}{(x-1)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-3x+2 = 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + y^2 + 2 = 0$$

$M \in \Gamma \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. L'équation $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ est celle du cercle de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{3}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Les coordonnées du point d'affixe $z = 1$ vérifient cette équation, en effet, $\left(1-\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{1}{4}$. soit I ce point.

Γ, l'ensemble cherché, est donc le cercle de centre Ω, d'affixe $\omega = \frac{3}{2}$, et de rayon $\frac{1}{2}$, privé du point I.

Exercice 5 à prise d'initiative

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $1+z+z^2+z^3 = 0$.

- **Une piste de résolution, à l'aide d'une factorisation :**

$\forall z \in \mathbb{C}$, $1+z+z^2+z^3 = (1+z)+z^2(1+z) = (1+z)(1+z^2) = (1+z)(z+i)(z-i)$.

Ainsi, $1+z+z^2+z^3 = 0 \Leftrightarrow (1+z)(1+i)(1-i) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{z = -1 \; ou \; z = -i \; ou \; z = i}$.

Les solutions de cette équation sont $-1, -i$ et i .

- **Une piste de résolution, à l'aide de l'expression de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique**

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z \neq 1,\quad 1+z+z^2+z^3 = \frac{z^4-1}{z-1} = \frac{(z^2-1)(z^2+1)}{z-1} = \frac{(z-1)(z+1)(z^2+1)}{z-1} = \frac{(z-1)(z+1)(z^2+1)}{z-1}$$

$1+z+z^2+z^3 = \frac{\cancel{(z-1)}(z+1)(z+i)(z-i)}{\cancel{z-1}} = (z+1)(z+i)(z-i)$, où l'on retrouve la situation précédente.

De plus, si $z = 1, 1+z+z^2+z^3 \neq 0$

Les solutions de cette équation sont $-1, -i$ et i .

- **Autre piste: en remarquant que -1 est solution évidente**,

pour tout z de $\mathbb{C}$, $1+z+z^2+z^3$ se factorise sous la forme $(z+1)(az^2+bz+c)$,

et on prouve facilement que $a = c = 1$ et $b = 0$ …